הרצאה XVII- אינפי 1

- תודה רבה לגיא בלשר!

כמה דוגמאות לפני שנמשיך בחומר:

קודם כל כדאי לדעת איך לחשב גבול של $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$.

גם כדאי לדעת את הגבול הבא: $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = \lim_{t\to\infty} e^{t\ln\left(1+\frac{x}{t}\right)} = \lim_{t\to\infty} e^{t\left[\frac{x}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right]} = \lim_{t\to\infty} e^{x+to\left(\frac{1}{t}\right)} = e^x$.

<u>דילוגיישן:</u> ☺

<u>רציפות במידה שווה</u>:

הפונקציה רציפה אם מתקיים $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\ |x-x_0|<\delta\ and\ then\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. ואז $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)$.

הגדרה: אומרים שפונקציה $f: A\to R$ רציפה במידה שווה אם $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\exists x',x''\in A|x'-x''|<\delta : |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

דוגמאות:

1. $x\in[0,\infty)$, $f(x)=x^2$. נקבע $\varepsilon>0,\delta>0$. נגדיר $x''=x'+\frac{\delta}{2}$, ונקבל $|x'-x''|<\delta$ אבל $|f(x')-f(x'')| = |x'-x''||x'+x''| = \frac{\delta}{2}\left(2x'+\frac{\delta}{2}\right)\to_{+\infty}+\infty$ ולכן היא לא רציפה במידה שווה.
2. $x\in(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$. ומתקיים כי גם זו לא רציפה במידה שווה.
3. $x\in(0,\infty)$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

<u>משפט</u>: משפט קנטור: אם f רציפה ב-$[a,b]$ ($f\in C[a,b]$), אזי f רציפה במ״ש.

הוכחה: נניח בשלילה שf אינה רציפה במ״ש. מתקיים $\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\exists x',x''\in[a,b]: |x'-x''|<\delta, |f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon$. נגדיר ש $\delta=\frac{1}{n}$. מתקיים ש $\exists x'=x_n', x''=x_n'' : |x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$ אבל $|f(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon>0$. $a\le x_n'\le b$ אזי לפי משפט בולצאנו ויירשטראס $\exists\{x_{n_k}'\}_{k=1}^{\infty}: x_{n_k}'\to x_0\in R$. כמו כן מתקיים $x_{n_k}''=\underbrace{x_{n_k}'}_{\to x_0}+\left(\underbrace{x_{n_k}''-x_{n_k}'}_{\to 0}\right)\to x_0$. ידוע שf רציפה, לכן היא בפרט רציפה ב-x_0. לכן $f(x_{n_k}')\to f(x_0)$ וכן $f(x_{n_k}')\to f(x_0)$ אבל $|f(x_{n_k}')-f(x_{n_k}'')|\ge\varepsilon$ וזוהי סתירה כי $0\ge\varepsilon$ לא מתקיים. לכן f רציפה במ״ש. מ.ש.ל.

<u>חזריישן:</u> ☺

כעת אפשר לחזור לגזירות. הגדרנו בהרצאה קודמת: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$. כמו כן, לפי המשמעות הגיאומטרית שהראנו בהרצאה קודמת ניתן לרשום $f'(x_0)=\tan\alpha$. כאשר α היא הזווית בין המשיק לציר הx.

<u>גרף</u>:

הגדרה: $\Gamma_f=\{(x,y)|x\in A, y=f(x)\}=\{(x,f(x))|x\in A\}$. נסמן את הקו הישר שמשיק ב-(x_0,y_0) ל-Γ_f בתור $T_{x_0,y_0}(\Gamma_f)$ ונקבל שמתקיים (לפי הרצאה קודמת) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

דוגמא: $x\in[0,\infty)$, $f(x)=x^2$. הנגזרת היא $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=2x_0$ וכך ניתן לחשב ישירות את הישר המשיק.

<u>נגזרת מימין ומשמאל</u>:

הגדרה: $f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. ומתקיים כי $f'(x_0)$ קיימת אם ורק אם קיימת הנגזרת משתי הצדדים הצדדים, והנגזרת משתי הכיוונים שווה.

דוגמא: $f(x)=|x|$. $f'(0+0)=1$, $f'(0-0)=-1$. ולכן לא קיימת נגזרת בנקודה *x=0*. נאמר, הפונקציה אינה גזירה ב*x=0*. \

<u>פעולות עם נגזרות</u>:

<u>משפט</u>: $f,g:(a,b)\to R$ וגם $x_0\in(a,b)$. ונניח גם כי *f,g* דיפרנצאבילית בx_0.

1. עבור α,β ממשיים, מתקיים $(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$ והנגזרת מוגדרת.
2. $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$. (של לייבניץ) והנגזרת מוגדרת.
3. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ והנגזרת מוגדרת.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$. והנגזרת מוגדרת.

הוכחה:

1. $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha f(x)+\beta g(x)-[\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)]}{x-x_0}=\alpha\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\beta\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. מ.ש.ל.
2. $f(x_0+t)=f(x_0)+f'(x_0)+o(t)$, $g(x_0+t)=g(x_0)+g'(x_0)+o(t)$. ואם נכפול את מה שפתחנו נקבל שמתקיים $g(x_0+t)f(x_0+t)=f(x_0)g(x_0)+\big(f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0)\big)t+o(t), t\to 0$, ומכאן נובע הדרוש, ז"א שמתקיים $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$. מ.ש.ל.
3. מתקיים: $\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}=\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)}\to_{x\to x_0}=-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$. מ.ש.ל.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)})=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$. מ.ש.ל.

<u>נגזרת של פונקצית הרכבה</u>:

<u>משפט</u>: $f:(a,b)\to(c,d), g:(c,d)\to R$. נסמן $h=g\big(f(x)\big)$, $h\coloneqq g\circ f$. אם *f* דיפרנצאבילית בנקודה *x₀*. ו*g* דיפרנצאבילית בנקודה y_0, אזי *h* דיפרנצאבילית בנקודה x_0 ומתקיימים הדברים הבאים:

- $h'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.
- $h'(x_0)=g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$.
- $(gf)'(x_0)=g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$.
- $\frac{dh}{dx}(x)=\frac{dg}{dy}y(x)\frac{dy}{dx}(x)$.

נגזרת של פונקצית הפיכה :

משפט : $f:(a,b)\to(c,d)$. נניח שf הפיכה , ז״א שקיימת $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$. נניח שf דיפנרציאבלית בנקודה x_0, אזי f^{-1} גזירה בנקודה $y_0=f(x_0)$ ומתקיים : $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f(x_0)}$.

הוכחה : ידוע כי מתקיים $f^{-1}(f(x))=x$, לכן מתקיים $(f^{-1})'(f(x))(f'(x))=1$ ולכן $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f(x_0)}$. מ.ש.ל.

טבלת נגזרות של פונקציות אלמנטריות

$c'=0$	$c'=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0$
$x'=1$	$x'=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(x^n)'=(x\cdots x)'=\underbrace{\underbrace{x\cdot\cdot x}_{n-1}+\cdots+\underbrace{x\cdot\cdot x}_{n-1}}_{n}=nx^{n-1}$
$(e^x)'=e^x$	$(e^x)'=\lim_{t\to0}\frac{e^{x+t}-e^x}{t}=e^x\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=e^x$
$(a^x)'=a^x lna$	$(a^x)'=\lim_{t\to0}\frac{a^{x+t}-a^x}{t}=a^x\lim_{t\to0}\frac{a^t-1}{t}=a^x\ln a$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin x_0)'=\lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{sinx}-\sin x_0}{x-x_0}=$ $\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{\mathrm{x-x_0}}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{2\frac{x-x_0}{2}}=\cos x_0$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos x_0)'=\lim_{x\to x_0}\frac{\cos\mathrm{x}-\cos x_0}{x-x_0}=$ $-\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{\mathrm{x-x_0}}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}}{2\frac{x-x_0}{2}}=-\sin x_0$
$(\ln y)'=\frac{1}{y}$	$ln=\exp^{-1}$. $(\ln y)'=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{y}$
$(x^a)'=ax^{a-1}$	$(x^a)'=\left(e^{alnx}\right)'=e^{alnx}(alnx)'=e^{alnx}\frac{a}{x}=\frac{ax^a}{x}=$ ax^{a-1}.
$(\tan x)'=\frac{1}{cos^2x}$	$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{cosx}\right)'=\frac{\cos^2x--\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}$
$(arc\tan y)'=\frac{1}{1+y^2}$	$(arc\tan y)'\underbrace{=}_{y=\tan x}\frac{1}{(\tan x)^2}=\frac{1}{\frac{1}{cos^2x}}=\frac{1}{1+tan^2x}=$ $\frac{1}{1+\tan^2(arctany)}=\frac{1}{1+y^2}$
$(arc\sin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	תנסו כתרגיל בית):
$(arc\cos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	תנסו כתרגיל בית):