תרגול 9

21 ביולי 2016

הגדרה 1. יהי F שדה וקטורי. אזי הרוטור של F, $rot\mathbf{F}$ מוגדר על ידי

$$rot\mathbf{F} = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(R'_y - Q'_z\right)\hat{i} + \left(P'_z - R'_x\right)\hat{j} + \left(Q'_x - P'_y\right)\hat{k}$$

משפט 1. *(משפט סטוקס):* יהיו S משטח דו-צדדי ב $\mathbb{R}^3$ושדה $F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ שדה וקטורי בעל נגזרות חלקיות רציפות בסביבה כלשהי של S. יהי $\hat{n}$ נורמל היחדיה ל S. אזי מתקיים

$$\iint\limits_{s} rot\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_\Gamma F \cdot \mathbf{d}r$$

כאשר Γהיא השפה של S עם אוריינטציה חיובית ביחס ל $\hat{n}$.

תרגיל 1. חשב את $\int_\Gamma (2y+3x)\,dx + \left(x-y^2\right)dy + (x+1)\,dz$ כאשר Γ הוא המעגל $\left\{(x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0\right\}$ כך ש הנורמל ב $(0,0,a)$ שווה ל

פתרון: נסמן $F = (2y+3x)\,\hat{i} + \left(x-y^2\right)\hat{j} + (x+1)\,\hat{k}$. מתקיים

$$rot\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y+3x & z-y^2 & x+1 \end{vmatrix} = (-1,-1,-2).$$

נשתייחס ל Γ כאל שפה של המשטח $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2 \leq a$.נורמל היחידה למישור הוא $\hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. בעזרת נוסחת סטוקס נקבל

$$\int_\Gamma F \cdot dr = \iint\limits_S rot\mathbf{F} \cdot \hat{n} ds = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint\limits_S ds = -\frac{4}{\sqrt{3}}\pi a^2$$

מכיוון ש $\iint\limits_S ds$ שווה לשטח מעגגל בעל רדיוס S.

תרגיל 2. חשב את $I = \int\limits_{\Gamma} z^3dx + 3y^2dy - x^3dz$ כאשר Γ הוא מעגל $y = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ בכיוון החיובי (נגד השעון עם נסתכל על מהכיוון החיובי של ציר ה y)

פתרון: נסמן $F = \left(z^3, 3y^2, -x^3\right)$.

$$rot\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 & 3y^2 & -x^3 \end{vmatrix} = 3\left(z^2 + x^2\right).$$

משטח S שלנו יהיה החלק של המישור $y = 1$ מעל המעגל $x^2 + y^2 \leq 1$ והנרמל ל-S הוא $(0, 1, 0)$. נקמל:

$$I = \iint\limits_{S} 3\left(z^2 + x^2\right) ds = 3\int\limits_{0}^{2\pi} d\phi \int\limits_{0}^{1} \rho \cdot \rho^2 d\rho = \frac{3}{2}\pi.$$

תרגיל 3. חשב בעזרת משפט סטוקס את $\int\limits_{\Gamma} F \cdot \mathbf{d}r$ כאשר Γ הוא הקו השבור $ABCDEFA$ כאשר

$$\begin{aligned} A &= (1,0,0) \\ B &= (1,1,0) \\ C &= (0,1,0) \\ D &= (0,1,1) \\ E &= (0,0,1) \\ F &= (1,0,1). \end{aligned}$$

ו $F = \left(xy, y^2, -3yz\right)$

פתרון: נרשום את האינטגרל באופן הבא. נסמן ב $O = (0,0,0)$ את ראשית הצירים.

$$\int\limits_{\Gamma} = \int\limits_{ABCOA} F \cdot dr + \int\limits_{CDEOC} F \cdot dr + \int\limits_{EFAOE} F \cdot dr.$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים באגף הימני.

נשתצש בנוסחת סטוקס.

$$\int\limits_{ABCOA} F \cdot dr = \iint\limits_{S} rot\mathbf{F} \cdot dr$$

כאשר $S = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, z = 0, x, y \in [0,1]\right\}$.

$$rot\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 & -3yz \end{vmatrix} = (-3z, 0, -x)$$

הנורמל המתאים הינו $(0,0,1)$ולכן

$$\int\limits_{ABCOA} F\cdot dr=\iint\limits_{S}(-3z,0,-x)(0,0,1)\,ds=-\iint\limits_{S}xdxdy=\frac{1}{2}.$$

עבור הריבוע $CDEOC$ המשטח הינו $S=\left\{(x,y,z)\left|x=0,y,z\in[0,1]\right.\right\}$
והנורמל הוא $(1,0,0)$. ולכן

$$\int\limits_{CDEOC} F\cdot dr=\iint\limits_{OCDE}(-3z)\,dydz=-\frac{3}{2}.$$

באופן דומה $\int_{AOEFA}F\cdot dr=0$. נחבר את כל האינטגרלים ונקבל 2.