תרגיל 7 - פתרון

1. נניח ו μ הינה מידה סופית. הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית $f(x)$ הינה אינטגרבילית אם ורק אם: $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x: f(x)\geq n\right\}\right)<\infty$.

פתרון:

נרשום:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x: f(x)\geq n\right\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int 1_{\left(\left\{x:f(x)\geq n\right\}\right)}d\mu \overset{\substack{monotone\\ convergence}}{=} \int\sum_{n=1}^{\infty}1_{\left\{x:f(x)\geq n\right\}}d\mu=\int\sum_{n=1}^{\infty}n_{\left\{x:n+1>f(x)\geq n\right\}}d\mu$$

באשר המעבר מטור אינטגרלים לאינטגרל של טור (השוויון השני) נכון הודות למשפט ההתכנסות המונוטונית (ודאו את קיום התנאים).

נסמן: $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n_{\left\{x:n+1>f(x)\geq n\right\}}$, אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x: f(x)\geq n\right\}\right)=\int g(x)d\mu(x)$$

$\Leftarrow$ כיוון ראשון: אם f אינטגרבילית.

נשים לב שהפונקציה $g(x)$ הינה למעשה $\lfloor f(x)\rfloor$ פונקצית פלור, כלומר: השלם הגדול ביותר מכל השלמים שקטנים מהערך $f(x)$. כך שלמעשה הפונקציה $g(x)$ נשלטת ע"י הפונקציה $f(x)$ ולכן אינטגרבילית.

$\Rightarrow$ כיוון שני: אם הטור מתכנס.

אזי נוסיף את פונקצית האינדיקטור ונקבל כי $f(x)\leq g(x)+1$. כמו כן, $g(x)+1$ אינטגרבילית כי המידה הינה סופית ולכן גם f אינטגרבילית.

שאלה 2

תהי $E\in\mathcal{A}$ כך ש $\mu(E)>0$ וגם $\mu(X\setminus E)>0$.

נגדיר סדרת פונקציות:

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad f_{2k} := \mathbb{1}_{E^c}$$

$$f_{2k-1} := \mathbb{1}_{E}$$

הראו כי עבורה זה מהווה דוגמא לאי שוויון חד בלמה של פאטו.

פתרון.

לכל n f_n מדידה ואי שלילית, לכן לפי הלמה של פאטו:

$$(*)\qquad \int_X \liminf f_n \, d\mu \le \liminf \int_X f_n \, d\mu$$

נסמן $c := \min\{\mu(E),\mu(E^c)\}$, אזי לפי הנתון $0 \lneq c$. (1)

ומתקיים

$$(2)\qquad \liminf \int_X f_n \, d\mu = c$$

כמו כן, נשים לב: עבור $x\in X$:

אם $x\in E$ אזי: $\forall k:\ f_{2k}(x)=0\ ;\ f_{2k-1}(x)=1$

אחרת $x\in E^c$ ומתקיים: $\forall k:\ f_{2k}(x)=1\ ;\ f_{2k-1}(x)=0$

לכן, לכל $x\in X$ $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

מכאן שאגף שמאל של $(*)$ שווה ל: $\int_X \liminf f_n \, d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0$ (3)

משילוב של (1), (2) ו-(3) נקבל אי שוויון חד ב-$(*)$, כנדרש.

שאלה 3

תהי $f: X \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית-μ.

לכל $t \in \mathbb{R}$ נגדיר:

$$F(t) := \int_X f(x) \cos(e^t f(x))\, d\mu(x).$$

הוכיחו כי F רציפה וסופית ב-$\mathbb{R}$.

פתרון:

נשים לב:

$$|F(t)| = \left| \int_X f(x) \cos(e^t f(x))\, d\mu(x) \right|$$

$$\leq \int_X |f(x)| |\cos(e^t f(x))|\, d\mu(x) \underset{\uparrow}{\leq} \int_X |f(x)|\, d\mu(x) \underset{\uparrow}{<} \infty$$

$|\cos(\cdot)| \leq 1$ נתון: f אינט' -μ.

לכן F סופית ב-$\mathbb{R}$.

כעת נוכיח שלכל סדרה t_n שמתכנסת ל-t (כש-n שואף ל-∞) מתקיים:

$$F(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(t).$$

נניח $t_n \to t$, נגדיר סדרת פונקציות: $f_n : X \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f_n(x) := f(x) \cos(e^{t_n} f(x))$$

אזי: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \cos(e^t f(x))$ וגם $\forall n \quad |f_n| \leq |f|$.

נזכיר כי f אינטגרבילית, ולכן, לפי משפט ההתכנסות הנשלטת:

$$F(t_n) = \int_X f_n\, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f(x) \cos(e^t f(x))\, d\mu(x) = F(t)$$

כנדרש.

שאלה 4:

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ מ"מ. $a \in (0,\infty)$, $f: X \to [0,\infty]$ מדידה.

$$0 < C := \int_X f \, d\mu < \infty$$

הוכיחו כי:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right) d\mu = \begin{cases} C & a=1 \\ \infty & 0<a<1 \\ 0 & 1<a<\infty \end{cases}$$

פתרון: (נקבע) לכל n.

$$0 \leq f_n := n\log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right) = \log\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)^n$$ מדידה.

$$= \log\left(\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)^{n^a}\right)^{n^{1-a}}$$

וכיון ש- $0<a<\infty$, מתקיים:

$$\left(1+\frac{f^a}{n^a}\right)^{n^a} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{f^a}$$

לכן

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \log\left(e^{f^a}\right)^{n^{1-a}}$$

(1) עבור $\underline{a=1}$: $\forall x: \; f_n(x) \longrightarrow f(x)$ לפי $(*)$

נזכור: אם $0 \leq t$, $1 \leq a$ אז:

$$1+t^a < (1+t)^a < e^{at}$$

לכן

$$(**) \qquad \left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^a\right)^n \leq e^{a\frac{f}{n}n} = e^{af}$$

- אזי, $a=1$, לכן $\left(1+\frac{f}{n}\right) \leq e^f$

ולכן: $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$.

בנוסף $f \in L^1(\mu)$ (כי $0 \leq f$ ו- $C<\infty$).

לכן, לפי משפט ההתכנסות הנשלטת

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu = c$$

(2) עבור $1<a<\infty$: במקרה זה $n^{1-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

לכן, לפי $(*)$ אם $0 \leq f(x) < \infty$:

$$f_n(x) \longrightarrow \log\left(e^{(f(x))^a}\right)^0 = \log 1 = 0.$$

בנוסף $f \in L^1(\mu)$ ולכן $0 \leq f < \infty$ כ"מ.

לכן $f_n(x) \longrightarrow 0$ כמ"ע, ולפי $(**)$:

$$\left(1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^a\right)^n \leq e^{af(x)}$$

$$\Leftarrow \quad f_n(x) \leq a f(x).$$

מכך ש- a קבוע סופי, וגם $f \in L^1(\mu)$ נקבל: $af \in L^1(\mu)$.

לכן, לפי משפט ההתכנסות הנשלטת:

$$\int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X 0 \, d\mu = 0$$

(3) עבור $0<a<1$: במקרה זה $n^{1-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

לכן, אם $f(x) \neq 0$ אזי לפי $(*)$ $f_n(x) \longrightarrow \infty$.

אחרת אם $f(x)=0$ אזי $f_n(x) \longrightarrow 0$.

תהי $E := \{x \mid f(x) \neq 0\}$. מכיון ש: $0<c$: $0<\mu(E)$,

ומתקיים: $\int_X f_n \, d\mu = \int_E f_n \, d\mu$.

$f_n \geq 0$ - מדידה וב- E: $f_n \to \infty$ נקודתית. לכן,

לפי הלמה של פאטו

$$\infty = \underset{>0}{\infty \, \mu(E)} = \int_E \infty \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n \, d\mu \leq \overline{\lim} \int_E f_n \, d\mu \leq \infty$$

ולכן הראינו: $\lim \int_E f_n \, d\mu$ קיים, ושווה ∞.

כנדרש.

שאלה ד:

יהי $(X,\mathbb{A},\mu)$ מ"מ. f_n מדידה-$\mathbb{A}$ וכן חסומה

כלומר $\|f_n\|_u<\infty$ $\forall n$. בנוסף, $f_n \xrightarrow[n]{\text{במ"ש}} f$ ב-X.

(1) הוכח כי $\|f\|_u<\infty$ וכי $\sup_n \|f_n\|_u < \infty$

(2) הוכח כי אם $\mu(X)<\infty$ אז $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$

(3) תן דוגמה של מ"מ כך ש-$\mu(X)=\infty$, וסדרת פונ' מדידות-$\mathbb{A}$:

$(f_n)_n$, כך ש $f_n \xrightarrow[n]{\text{במ"ש}} f$ אבל $\int f_n \not\to \int f$.

פתרון: (1) $\|f\|_u<\infty$: כיוון שעבור $\varepsilon=1$ קיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$

$$\|f_n - f\|_u < 1$$

בפרט: $\|f\|_u \leq \|f-f_{n_0}\|_u + \|f_{n_0}\|_u < 1+\|f_{n_0}\|_u < \infty$.

$\sup_n \|f_n\|_u < \infty$: כיוון שעבור $\varepsilon = 1$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$

$$\|f_n - f\|_u < 1$$

$$\|f_n\|_u \leq \|f_n - f\|_u + \|f\|_u < 1 + \|f\|_u$$

ולכן:

$$\sup_n \|f_n\|_u \leq \max\{\underset{<\infty}{\|f_1\|_u}, \underset{<\infty}{\|f_2\|_u}, \dots, \underset{<\infty}{\|f_{n_0}\|_u}, \underset{<\infty}{1+\|f\|_u}\} < \infty$$

(2) יהי $C=\sup_n \|f_n\|_u$. לפי (1): $C<\infty$.

לכן, אם $\mu(X)<\infty$ אז $C\in L^1(\mu)$: $\int_X |C| \, d\mu = C\mu(X) < \infty$.

$f_n \xrightarrow[n]{\text{במ"ש}} f$ בפרט: $\forall x\in X: f_n(x)\to f(x)$, ו-

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_u < C$$

לכן, לפי משפט ההתכנסות הנשלטת: $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$

(3) נגדיר $f_n : X \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f_n(x) = \frac{1}{n}$ $\forall x \in X$

אז f_n מדידה - $\mathbb{A}$ (קבועה) $f_n \to f$ במ"ש ב X

כאשר $f \equiv 0$.

$$\forall n \quad \int_X f_n \, d\mu = \frac{1}{n}\mu(X)$$

$$\int_X f \, d\mu = 0$$

לכן אם $\mu(X) = \infty$ נקבל בדוגמה זו:

$$\infty = \int_X f_n \, d\mu \not\to \int_X f \, d\mu = 0$$