פתרון לתרגיל בית של אינטגרלים מסויימים

פתרון לשאלה 1

א. $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ $\Rightarrow$ $f'(x)^2=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}$

$$f'(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$f'(x)^2+1=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}+1=\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2+4}{4}\underset{\Downarrow}{=}\frac{(e^{x}+e^{-x})^2}{4}$$

לפי נוסחת הכפל המקוצר

$$\Downarrow$$

$$L=\int_a^b\sqrt{\frac{(e^{x}+e^{-x})^2}{4}}\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b(e^{x}+e^{-x})\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{x}-e^{-x}\right]_a^b=\frac{1}{2}\left[e^{b}-e^{-b}-e^{a}+e^{-a}\right]$$

ב. $f(x)=\ln x$ ב $[1,2]$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$(f'(x))=\frac{1}{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$(f'(x))^2+1=\frac{1}{x^2}+1$$

$$\Downarrow$$

$$L=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\,dx=$$

$$=\left[\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\cdot x\left(\sqrt{x^2+1}-\log(\sqrt{x^2+1}+1)+\log x\right)}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^2=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+1}\cdot 2\cdot\left(\sqrt{5}-\log(\sqrt{5}+1)+\log 2\right)}{\sqrt{5}}-$$

$$-\frac{\sqrt{2}\cdot 1\left(\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1)+\log 1\right)}{\sqrt{2}}$$

ב. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ בקטע $[-1,1]$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[f'(x)]^2=\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}+1}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{x^2+1-x^2}{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{פונקציה זוגית}}\,dx=$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=2\arcsin x\Big|_0^1=2\left[\frac{\pi}{2}-0\right]=\pi$$

<u>פתרון לשאלה 2</u>

א. נרצה להוכיח ש: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

אם נניח ש f היא פונקציה זוגית:

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\underbrace{\int_{-a}^{0}f(x)dx}_{I}+\underbrace{\int_0^a f(x)dx}_{II}=$$

$$\underset{\text{כי } f \text{ זוגית}}{=}\int_{-a}^{0}f(-x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=\int_{-a}^{0}f(t)dt+\int_0^a f(x)dx=$$

ב-I נעשה הצבה:

$t=-x$

$dt=-dx$

$$=\int_a^0 f(-x)(-dx)+\int_0^a f(x)\,dx\underset{\text{כי } f \text{ זוגית}}{=}\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(x)\,dx=$$

$$=2\int_0^a f(x)\,dx$$

<u>פתרון לב'</u>

בדיוק באותו אופן מוכיחים גם כי:

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=$$

$$=\int_{-a}^{0}\underbrace{-f(-x)}_{I}dx+\int_0^a\underbrace{f(x)dx}_{II}=-\int_a^0 f(t)dt+\int_0^a f(x)dx=$$

$t=-x$

$dt=-dx$

$$= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \underset{\text{כי } f \text{ אי זוגית}}{=} -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

<u>פתרון לשאלה 3</u>

נחשב את האינטגרל של

$$\int_{-1}^{1} \frac{(\sin x^3)\cdot e^{x^2} + \arctan x}{1+x^2}\,dx$$

<u>פתרון:</u> התחום הוא סימטרי סביב (ה) $x=0$ ולכן

כדאי לבדוק אי זוגיות של הפונקציה:

(1) $\sin x^3$ = אי זוגית הרכבה של שתי

פונקציות אי זוגיות.

(2) e^{x^2} = פונקציה זוגית כי $e^{(-x)^2} = e^{x^2}$

$\Leftarrow$ $e^{x^2}\cdot \sin x^3$ פונקציה אי זוגית כמכפלה

של זוגית באי זוגית.

(3) $\arctan x$ = אי זוגית $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $e^{x^2}\sin x^3 + \arctan x$ = פונק' אי

זוגית, כסכום של שתי אי זוגיות.

(4) $1+x^2$ = פונק' זוגית

<u>סה"כ:</u> $\dfrac{e^{x^2}\sin x^3 + \arctan x}{1+x^2}$

פונקציה אי זוגית כמכפלה של אי זוגית

בזוגית.

$[-1,1]$ הוא תחום סימטרי סביב $x=0$ ולכן

לפי שאלה 2:

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{x^2}\sin x^3 + \arctan x}{1+x^2}\,dx = 0$$

<u>בהצלחה!!</u>

(4)

פתרון לשאלה 4

f רציפה לכל ממשי $\Leftarrow$ רציפה ולכן יש

לה פונקציה קדומה מוגדרת:

$$h(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = F(g(x)) - F(h(x))$$

$$\Downarrow$$

$$h'(x)=F'(g(x))\cdot g'(x) - F'(h(x))\cdot h'(x) =$$

$$= f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$$

כי $F'(x)=f(x)$

F קדומה של f

שאלה 5

חשבו את הגבול:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_{-x}^{x} e^t\sqrt{t+1}\,dt$$

פתרון: כאשר $x\to 0$ מונה שואף לאפס

וגם המכנה שואף לאפס ולכן ניתן

להפעיל את כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_{-x}^{x} e^t\sqrt{t+1}\,dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x\sqrt{1+x} - e^{-x}\sqrt{1-x}}{1} =$$

$\Downarrow$ לפי שאלה 4

$$= 1-1=0$$

שאלה 6 - פתרון:

כדי למצוא (נק' קיצון) של g, נגזור אותה

ונשווה את הנגזרת לאפס:

$$g'(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt + x\cdot f(x) = 0$$

כמובן שרואים $x=0$ מקיים

כי $0\cdot f(0)=0$ ו- $\int_0^0 f(t)\,dt=0$

$\Leftarrow$ $g'(0)=0$ $\Leftarrow$ $x=0$ נק' חשודה לקיצון.

לבדוק (נגזרת שנייה):

$$g''(x) = f(x) + f(x) + x \cdot f'(x) = 2 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)$$

$$\Downarrow$$

$$g''(0) = 2 \cdot f(0) > 0$$

כי $f(0)>0$ לפי הנתון, ולכן $x=0$

היא נק' מינימום מקומית $x=0$.

∎