(1) 10.11.13

תורת המידה
תרגול 5

דוגמא: חוג σ שאינו אלגברה σ

יהי R החוג של כל תתי קבוצות $\mathbb{R}$ שהן בנות מניה

- נוכיח ש-R חוג: אם $A,B\in R$ אז $|A\cap B|\le|A|$ ⇐ בת מניה

  $|A\Delta B|\le|A\cap B|$ ⇐ בת מניה

  ולכן $A\cap B,\ A\Delta B\in R$

- נראה ש-R חוג σ: יהיו $A_n\in R$ לכל n טבעי. כלומר A_n בת מניה לכל n.

  ולכן גם $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ בת מניה.

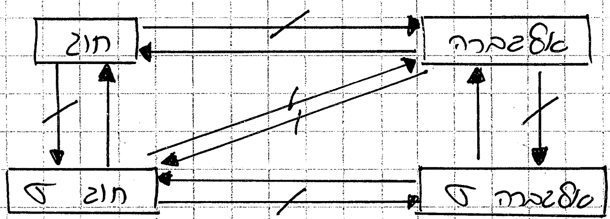
  ולכן $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in R$, ולכן R חוג σ.

- נראה ש-R לא אלגברה: נניח בשלילה שקיימת $E\in R$, כך שלכל $A\in R$, $A\subseteq E$

  לכל $t\in\mathbb{R}$, $\{t\}\in R$. ולכן $\{t\}\subseteq E$ לכל t ממשי.

  ולכן $E=\mathbb{R}$, אבל אז נקבל סתירה כי $E=\mathbb{R}$ לא בת מניה.

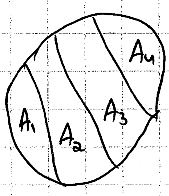
סיכום:



הגדרה: מערכת קבוצות R נקראת חוג למחצה אם $\emptyset\in R$, R סגורה לגבי חיתוכים,

ובעלת התכונה שאם $A,A_1\in R$ ו- $A_1\subset A$ אז ניתן להציג את A כ: $A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$,

כאשר A_k זרות בזוגות והקבוצה הראשונה היא A_1.



$A,A_1\in R$

$A_2,A_3,A_4\in R$

$A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$

הערה: כל חוג הוא חוג למחצה כי אם R חוג, ו- $A,A_1\in R$, ו- $A_1\subset A$ אז $A\setminus A_1\in R$

כי R הוא חוג ולכן סגורה לגבי הפרשים.

וגם, $(A\setminus A_1)\cap A_1=\emptyset$ ו- $A=A_1\cup(A\setminus A_1)$

2 10.11.13

[illegible]

תרגול 5

טענה: נניח ש-R חוג למחצה.

נניח ש- $A_1, A_2, A \in R$.

נניח שגם $A_1, A_2 \subset A$ ו- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ אז קיימות קבוצות זרות בזוגות וזרות ל- A_1, A_2,

$B_1, \dots, B$, כך ש- $A = A_1 \cup A_2 \bigcup_{m=1}^{k} B_m$.

פתרון: כיוון ש-R חוג למחצה ו- $A_1 \subset A$ קיימות $C_1, \dots, C_m \in R$ זרות בזוגות

ול- A_1 כך ש- $A = A_1 \cup (\bigcup_{i=1}^{m} C_i)$.

כיוון ש- $A_2 \subset A$ ו- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ נובע ש- $A_2 \subset \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ [כי A שווה לאיחוד של A_1 עם $\cup C_i$. ו- A_1 ו- A_2 זרות ו- A_2 גם מוכל ב-A ולכן A_2 חייב להיות מוכל ב- $\bigcup_{i=1}^{m} C_i$]

ולכן: $\bigcup_{i=1}^{m} C_i = (\bigcup_{i=1}^{m} (C_i \setminus A_2)) \cup A_2$

לכן קיבלנו ש:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \underbrace{(\bigcup_{i=1}^{m} (C_i \setminus A_2))}_{\bigcup_{i=1}^{m} C_i} = A_1 \cup A_2 \cup (\bigcup_{i=1}^{m} (C_i \setminus (A_2 \cap C_i)))$$

R חוג למחצה ו- $C_i \in R$, $A_2 \cap C_i$ וגם $A_2 \cap C_i \subseteq C_i$

ולכן קיימות קבוצות $B_{1i}, \dots, B_{Q_i i}$ כך ש- $C_i = (A_2 \cap C_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{Q_i} B_{ji})$

ו- B_{ji} זרות בזוגות ו- $B_{ji} \in R$

לכן: $A = A_1 \cup A_2 \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{Q_i} B_{ji}$

ו- B_{ji}, A_1, A_2 זרות בזוגות וכולן שייכות ל-R.

- תהי M מערכת תת קבוצות של קבוצה כלשהי X

תהי N מערכת תת קבוצות של קבוצה כלשהי Y

תהי $f: X \to Y$. נסמן: $f(M) = \{f(A) \mid A \in M\}$

$f^{-1}(N) = \{f^{-1}(B) \mid B \in N\}$

דוגמה: $f(n) = n+2$

$X = \{1,2,3,4,5\}$ $Y = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$M = \{\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{1,4\}\}$ $N = \{\{1,7\}, \{4\}, \{5,6\}\}$

$f(M) = \{f(\{1,2\}), f(\{3,4,5\}), f(\{1,4\})\} = \{\{3,4\}, \{5,6,7\}, \{3,6\}\}$

$f^{-1}(N) = \{f^{-1}(\{1,7\}), f^{-1}(\{4\}), f^{-1}(\{5,6\})\} = \{\{5\}, \{2\}, \{3,4\}\}$