שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

פתרון תרגיל בית 3 - טופולוגיה

שאלה 1

יהי (X,d) מ"מ.

א. הוכיחו כי לכל $x \in X$, $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X.

ב. הסיקו כי כל תת קבוצה סופית של X סגורה.

פתרון

א. נוכיח שלכל $x \in X$, $\{x\}$ היא קבוצה סגורה בשתי דרכים:

דרך סדרות- קבוצה סגורה במ"מ אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. ברור שהסדרה היחידה שמוכלת ב- $\{x\}$ היא הסדרה הקבועה שגבולה הוא, כמובן, $x \in \{x\}$.

דרך נוספת - נראה ש $X \setminus \{x\}$ פתוחה. תהי $y \in X \setminus \{x\}$. יהי $\varepsilon = d(x,y)$. ברור ש $\varepsilon > 0$ כי $x \neq y$. נראה שמתקיים $B(y,\varepsilon) \subseteq X \setminus \{x\}$. אם $z \in B(y,\varepsilon)$ אזי $\varepsilon > d(z,y)$. לכן, $z \neq x$ (כי $\varepsilon = d(x,y)$). מכאן $z \in X \setminus \{x\}$ וקיבלנו הדרוש.

ב. נניח ש- A תת קבוצה סופית של X. אם $A = \varnothing$ ברור ש A סגורה. אחרת, תהי $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n \geq 1)$. מתקיים $A = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}$. עפ"י סעיף א' לכל $1 \leq i \leq n$ $\{x_i\}$ סגורה. מכיון שאיחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה נקבל ש A סגורה.

מש"ל

שאלה 2

א. הוכיחו ש- $\mathbb{Q}$ אינה סגורה ואינה פתוחה ב- $\mathbb{R}$.

ב. הוכיחו: כל מישור ב- $\mathbb{R}^3$ הוא סגור.

ג. הוכיחו: הקבוצה $B = \{(x,y,z) \mid 3e^x - 35y^5 < 17y + z^2\}$ הינה פתוחה ב- $\mathbb{R}^3$.

ד. יהי $M_n(\mathbb{R})$ המרחב המטרי של המטריצות הריבועיות $n\times n$ עם מקדמים ממשיים (זהו המרחב המטרי $\mathbb{R}^{n\times n}$ עם המטריקה האוקלידית). הוכיחו שקבוצת המטריצות ההפיכות $GL_n(\mathbb{R})$ פתוחה במרחב זה.

__פתרון__

א. אינה פתוחה: כי כל כדור פתוח עם מרכז רציונאלי, מכיל גם נקודות אי רציונאליות.
אינה סגורה: קיימת סדרה בעלת איברים רציונאליים המתכנסת לאיבר שאינו רציונאלי (למשל: הפיתוח העשרוני של $\sqrt{2}$).

ב. כל מישור הוא מהצורה $Ax+By+CZ+D=0$. נתבונן בפונקציה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x,y,z)=Ax+By+CZ+D$. מתקיים $f^{-1}(\{0\})=\{(x,y,z)\mid Ax+By+CZ+D=0\}$ מכיוון ש $\{0\}$ סגור ב $\mathbb{R}$ ו- f רציפה הרי ש $f^{-1}(\{0\})$ (שהוא המישור) סגור ב$\mathbb{R}^3$.

ג. $B=f^{-1}(-\infty,0)$ באשר $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ הפונקציה הרציפה $f(x,y,z)=3e^x-35y^5-17y-z^2$ ולכן B פתוחה כתמונה הפוכה של פתוחה (תחת פונקציה רציפה).

ד. פונקצית הדטרמיננטה $\det:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ רציפה כפולינום ומתקיים $\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})=GL_n(\mathbb{R})$ מכיוון ש $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ פתוחה ב- $\mathbb{R}$ נקבל הדרוש.

מש"ל

__**שאלה 3**__

א. אילו מהמטריקות הבאות שקולות מעל $\mathbb{Z}$: d_Δ (המטריקה הדיסקרטית) , d_7 (המטריקה ה-7 אדית), d_5 (המטריקה ה-5 אדית) והמטריקה הסטנדרטית d המוגדרת ע"י $d(x,y)=|x-y|$ (הוכיחו את תשובתכם!).

ב. תהי $S=\left\{\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}: a_n\in\mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\right\}$. נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות:

$d\left(\left(a_n\right),\left(b_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n-b_n\right|$, $\rho\left(\left(a_n\right),\left(b_n\right)\right)=\sup\left\{\left|a_n-b_n\right|: n\in\mathbb{N}\right\}$. הוכיחו

או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולת.

<u>פתרון</u>

א. מתקיים $\left\{7^n\right\}\xrightarrow{d_7}0$ אבל $\left\{7^n\right\}\overset{d_5}{\not\to}0$ שכן $d_5(7^n,0)=1\underset{n\to\infty}{\not\to}0$. מכאן ש d_5 ו- d_7 אינן שקולות.

במטריקה הדיסקרטית הסדרות היחידות שמתכנסות הן הקבועות לבסוף.

במטריקות d_7,d_5 אין זה המצב, לכן שתי מטריקות אלה אינן שקולות לדסקרטית.

נוכיח שהמטריקה הסטנדרטית שקולה לדיסקרטית מעל $\mathbb{Z}$ (ולכן אינה שקולה ל- d_5,d_7). מ"ל שכל סדרה המתכנסת ב מ"מ $(\mathbb{Z},|\,|)$ קבועה לבסוף. נניח ש $x_n\to x$ אזי ניקח $\varepsilon=1$ ומתקיים שקיים n_0 כך שלכל $n\geq n_0$ $d\left(x_n,x\right)<1$.

מכאן בהכרח (המרחק המינימלי בין נקודות שונות של $\mathbb{Z}$ הוא 1), לכל $n\geq n_0$ $x_n=x$ והוכחנו הדרוש.

ב. שתי המטריקות אינן שקולות. נמצא סדרה שמתכנסת לאפס באחת מהן, ואינה מתכנסת בשניה.

נתבונן בסדרה הבאה:

$$a_1=\left(1,0,0,0,...\right)$$
$$a_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,...\right)$$
$$a_3=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0,...\right)$$
$$\vdots$$
$$a_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},...,\frac{1}{n},0,0,...\right)$$
$$\vdots$$

נסמן $b=(0,0,0,...)$. מתקיים:

$\rho\left(\left(a_n\right),b\right)=\frac{1}{n}\to 0$ וגם $d\left(\left(a_n\right),b\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1\not\to 0$; וזה מוכיח הדרוש.

מש"ל

שאלה 4

א. יהיו d_1,d_2 מטריקות שקולות מעל X. יהיו ρ_1,ρ_2 מטריקות שקולות מעל Y.
נניח ש- $f:\left(X,d_1\right)\to\left(Y,\rho_1\right)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $f:\left(X,d_2\right)\to\left(Y,\rho_2\right)$ רציפה.

ב. יהיו d_1,d_2 מטריקות כלשהן מעל X. יהיו ρ_1,ρ_2 מטריקות כלשהן מעל Y. נניח ש- $f:\left(X,d_1\right)\to\left(Y,\rho_1\right)$ רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $f:\left(X,d_2\right)\to\left(Y,\rho_2\right)$ רציפה.

פתרון

א. תהי U פתוחה ב-$\left(Y,\rho_2\right)$. מכיון ש ρ_1,ρ_2 מטריקות שקולות מעל Y נקבל U פתוחה ב-$\left(Y,\rho_1\right)$. $f:\left(X,d_1\right)\to\left(Y,\rho_1\right)$ רציפה וכן U פתוחה ב-$\left(Y,\rho_1\right)$ ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה ב$\left(X,d_1\right)$. d_1,d_2 מטריקות שקולות מעל X ולכן $f^{-1}(U)$ פתוחה גם ב $\left(X,d_2\right)$. קיבלנו שלכל U פתוחה ב-$\left(Y,\rho_2\right)$ $f^{-1}(U)$ פתוחה ב $\left(X,d_2\right)$ ומכאן $f:\left(X,d_2\right)\to\left(Y,\rho_2\right)$ רציפה.

ב. הפרכה ע"י דוגמא נגדית ניקח $X=Y=\mathbb{R}$, d_1 מטריקה דיסקרטית,
$d_2=\rho_1=\rho_2$ מטריקה סטנדרטית ב-$\mathbb{R}$ (מטריקה המושרית מערך מוחלט).
נקבל שכל פונקציה $f:\left(X,d_1\right)\to\left(Y,\rho_1\right)$ היא רציפה מכיון שכל תת קבוצה ב $\left(X,d_1\right)$ היא פתוחה (למה?) אבל ניתן למצוא f כך ש $f:\left(X,d_2\right)\to\left(Y,\rho_2\right)$ אינה רציפה, למשל, $f(x)=\begin{cases}x & x\neq 0\\ 5 & x=0\end{cases}$.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונקציה בין שני מרחבים מטריים.

א. הוכיחו: f רציפה אמ"מ $f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X לכל <u>כדור פתוח</u> $O\subseteq Y$.

ב. הראו שהטענה האנלוגית עבור כדורים סגורים אינה נכונה. כלומר, מצאו שני מרחבים מטריים ופונקציה בינהם $f:(X,d)\to(Y,\rho)$, כך ש- f אינה רציפה למרות שכן מתקיים התנאי הבא: $f^{-1}(B)$ סגורה ב- X לכל <u>כדור סגור</u> $B\subseteq Y$.

<u>פתרון</u>

א. $\Leftarrow$: אם f רציפה אז $f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X לכל <u>פתוחה</u> $O\subseteq Y$. מכיון שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה נקבל ש-$f^{-1}(O)$ פתוחה ב- X לכל <u>כדור פתוח</u> $O\subseteq Y$.

$\Rightarrow$: על מנת להוכיח ש- f רציפה נראה ש-$f^{-1}(U)$ פתוחה ב- X לכל <u>פתוחה</u> $U\subseteq Y$. תהי U פתוחה ב-Y. אזי לכל $x\in U$ קיים כדור פתוח $x\in B(x,\varepsilon_x)\subseteq U$. מכאן $U=\bigcup_{x\in U}B(x,\varepsilon_x)$. מתקיים

$$f^{-1}(U)=f^{-1}\left(\bigcup_{x\in U}B(x,\varepsilon_x)\right)=\bigcup_{x\in U}f^{-1}\left(B(x,\varepsilon_x)\right).$$

מכיון ש$f^{-1}\left(B(x,\varepsilon_x)\right)$ פתוחה לכל x עפ"י הנתון וכן איחוד של פתוחות הוא קבוצה פתוחה נקבל ש-$f^{-1}(U)=\bigcup_{x\in U}f^{-1}\left(B(x,\varepsilon_x)\right)$ פתוחה ב- X כדרוש.

ב. יהי $X=Y=\mathbb{R}$, d המטריקה הסטנדרטית ו- ρ המטריקה הדיסקרטית.

תהי $f=Id$ פונקציית הזהות. הפונקציה אינה רציפה שכן $\{5\}$ למשל פתוחה ב (Y,ρ) (כל הקבוצות פתוחות במ"מ דיסקרטי) אבל $f^{-1}(\{5\})=\{5\}$ לא פתוחה ב(X,d). מצד שני במטריקה הדיסקרטית כל כדור סגור עם רדיוס ≤ 1 הוא המרחב כולו וכדור סגור עם רדיוס $1>$ הוא נקודון (בדקו!) . מכיון ש- $f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ סגורה ב (X,d) וכן לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $f^{-1}(\{a\})=\{a\}$ סגורה ב(X,d) (ראו שאלה 1 א') נקבל הדרוש.

מש"ל

שאלה 6

נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $f(x)=\begin{cases}1 & xy=0\\ 2 & xy\neq 0\end{cases}$. נסמן ב-$S$ את אוסף כל הנקודות בהן f רציפה. מצאו את S וקבעו האם היא פתוחה או סגורה ב-$\mathbb{R}^2$.

פתרון

אוסף נקודות הרציפות הוא: $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\wedge y\neq 0\}$.

הוכחה: בכל נקודה מהצירים הפונקציה לא רציפה. נוכיח למשל עבור נקודות מהצורה $(x,0)$ כאשר $x\neq 0$ (ובאותו האופן ניתן להראות גם לנקודות מהצורה $(0,y)$ עבור $y\neq 0$). אם הפונקציה רציפה ב-$(x,0)$ אזי לכל סדרה $(x_n,y_n)\to(x,0)$ מתקיים $f(x_n,y_n)\to f(x,0)$. ניקח את הסדרה $\left\{\left(x,\frac{1}{n}\right)\right\}$. מתקיים $f\left(\left(x,\frac{1}{n}\right)\right)\equiv 2$ אבל $f(x,0)=1$ וזאת סתירה.

במקרה של הנקודה $(0,0)$ בחרו את הסדרה $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$.

כעת נראה שהפונקציה רציפה בנקודות שאינן על אחד הצירים. נוכיח עם סביבות.
תהי $a=(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq 0\wedge y\neq 0$. יהי $B(f(a),\varepsilon)$ כדור פתוח סביב $f(a)$. יש למצוא כדור פתוח $B(a,\delta)$ סביב a כך ש-$f(B(a,\delta))\subseteq B(f(a),\varepsilon)$. נבחר $\delta=\min\{|x|,|y|\}$ וקל לראות שמתקיים הדרוש.

לבסוף, קל לראות שזאת קבוצה פתוחה, שכן לכל נקודה יש כדור פתוח שמוכל כולו בקבוצה (למשל $S\supset B((x,y),r)\ni(x,y)$ עבור $r=\min\{|x|,|y|\}$).

מש"ל