מבוא לטופולוגיה – תרגיל בית 12 - פתרון

<u>בעיה 1</u>

יהי M מרחב מטרי ותהי $A \subseteq M$ תת קבוצה סגורה.

<u>הוכיחו</u> שקיימת סדרת קבוצות פתוחות $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ב-M

המקיימת $U_{n+1} \subseteq U_n$ ו- $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = A$.

<u>הוכחה</u>

יהי $U_n = \bigcup_{a\in A} B(a,\frac{1}{n})$. מכיוון שלכל $a \in A$ ולכל $n \in \mathbb{N}$

מתקיים $B\left(a,\frac{1}{n+1}\right) \subseteq B\left(a,\frac{1}{n}\right)$ אנחנו מקבלים: $U_{n+1} \subseteq U_n$.

איברים של הקבוצה A הם המרכזים של הקדורים

באיחוד $\bigcup_{a\in A} B(a,\frac{1}{n})$. לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $A \subseteq U_n$,

שמייד גורר $A \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

נשאר להוכיח ש-$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq A$.

נניח – <u>בשלילה</u> – שקיים $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ כך ש- $b \notin A$. אזי $b \in A^c$.

כיוון ש-A^c קבוצה פתוחה קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש-$B\left(b,\frac{1}{n_0}\right) \subseteq A^c$.

זה גורר ש-$B\left(b,\frac{1}{n_0}\right) \cap A = \emptyset$. כלומר, מרחק בין b לבין כל איבר

של A לא קטן מ-$\frac{1}{n_0}$. זה גורר $b \notin U_{n_0}$

כי <u>אחרת</u> היה קיים $a_0 \in A$ כך ש-$b \in B\left(a_0,\frac{1}{n_0}\right)$ או

במילים אחרות $d(a_0,b) < \frac{1}{n_0}$.

אבל $b \notin U_{n_0}$ גורר $b \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. <u>סתירה</u>.

בעיה 2

תהי A תת קבוצה ב-$\mathbb{R}$ כך ש- $A \subsetneq \mathbb{R}, \bar{A} = \mathbb{R}$.

הוכיחו שתת מרחב A לא קשור.

הוכחה

נניח - בשלילה - ש- A קשיר. מכיוון ש-$A \neq \mathbb{R}$ קיים $b \in \mathbb{R} - A$ לכן $A \subseteq (-\infty, b) \cup (b, \infty)$. אזי A מוכל או ב-$(-\infty, b)$ או ב-(b, ∞) כי A קשיר לפי ההנחה ושתי תת הקבוצות האלא פתוחות ב-$\mathbb{R}$ וזרות. מצד אחר, A קבוצה צפופה ב-$\mathbb{R}$ $(\bar{A} = \mathbb{R})$ ואז היא חותכת שתי תת הקבוצות הפתוחות. סתירה.

בעיה 3

יהי מ"מ M כך שהקבוצה $M - \{a\}$ לא סגורה.

הוכיחו: קיים שיכון $g: A \to M$ כאשר $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ וטופולוגיה על A מושרה מ-$\mathbb{R}$.

הוכחה

תענת עזר.

יהי Y מ"מ , b_n סדרה ב-Y כך ש-$b_n \to b \in Y$ וכל האיברים b_n שונים זה מזה ושונים מ-b.

יהי $B = \{b\} \cup \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$. אזי כל קבוצה סגורה בתת מרחב B היא קבוצה סופית או מכילה את האיבר b.

הוכתת תענת העזר.

כל נקודון סגור במ"מ. לכן כל תת קבוצה סופית סגורה.

נניח בשלילה ש- $S \subseteq B$ קבוצה סגורה, אינסופית ו-$b \notin S$.

אזי איברים של S הם איברי תת סדרה b_{n_i} של סדרה b_n.

לכן $b_{n_i} \to b$ וכיוון ש-S סגורהת $b \in S$. סתירה.

הוכחת הבעיה

נסמן $C = M - \{a\}$.

מכיוון ש-C לא סגורה, מתקיים $C \subset \bar{C} = M$. כלומר, $a \in \bar{C}$.

לפי התכונות של סגור כל סביבה של a חותכת את הקבוצה C.

נבנה (באינדוקציה) סדרה $x_n \in C$ כך שכל איבריה שונים זה מזה ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$.

(x_n כמובן יהיו שונים גם מ-a).

בסיס האינדוקציה.

מכיוון ש-$B(a,1)$ חותך C קיימת נקודה $x_1 \in C$ כך ש-$d(x_1, a) < 1$.

צעד האינדוקציה

נניח שבנינו $x_1, \dots, x_n \in C$ המקיימים התנאים הנידרשים.

נגדיר $r \coloneqq \min\{d(x_1, a), \dots, d(x_n, a), \frac{1}{n+1}\}$.

אזי $B(a, r) \cap C \neq \emptyset$, כלומר קיים $x_{n+1} \in C$ כך ש- $d(x_{n+1}, a) < r$. קל לראות ש-x_{n+1} מקיים את התנאים הנדרשים. (סוף הבניה).

מקבלים $d(x_n, a) \to 0$ שגורר $x_n \to a$.

נגדיר $g: A \to M$ כך ש-$g\left(\frac{1}{n}\right) = x_n$ ו-$g(0) = a$. נסמן $D = g(A)$.

נסמן ב- $\hat{g}: A \to D$ את הפונקציה המתקבלת מ-g על ידי צמצום הטווח. קל לראות ש-$\hat{g}$ חח"ע ועל.

אנחנו רואים שגם תת מרחב $A \subseteq \mathbb{R}$ וגם תת מרחב $D \subseteq M$ מקימים תנאי תענת העזר. לכן:

$U \subseteq A$ פתוחה $\Leftrightarrow$ U^c סגורה $\Leftrightarrow$

[לפי תענת העזר] U^c סופית או $0 \in U^c$ $\Leftrightarrow$

[$\hat{g}$ חח"ע ועל] $\hat{g}(U^c) = \hat{g}(U)^c$ סופית או $a = \hat{g}(0) \in \hat{g}(U)^c$ $\Leftrightarrow$

[לפי תענת העזר] $\hat{g}(U)^c$ סגורה $\Leftrightarrow$ $\hat{g}(U)$ פתוחה.

כלומר $U \subseteq A$ פתוחה $\Leftrightarrow$ $\hat{g}(U) \subseteq D$ פתוחה. לכן $\hat{g}$ הומיאומורפיזם ו-g שיכון, מש"ל.

<u>בעיה 4</u>
מצאו מרחב טופולוגי X ופונקציה רציפה $f\colon [0,\infty) \to X$ כך ש-f לא פתוחה ולא סגורה.

<u>פתרון</u>
יהי $X = \mathbb{R}$ ו-$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה כך ש- $f(x) = \arctan(x)$
לכל $x \in [0,\infty)$. אזי $[0,\infty)$ פתוחה וגם סגורה ב-$[0,\infty)$.
אבל $f\big([0,\infty)\big) = \left[0,\frac{\pi}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}$ לא פתוחה ולא סגורה ב-$\mathbb{R}$.
לכן f - לא פתוחה ולא סגורה.

<u>בעיה 5</u>
יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. יהי $\sim$ יחס שקילות על מרחב המכפלה $X \times Y$ כך ש-$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
<u>הוכיחו</u> ש-$(X \times Y)/\sim$ הומיאומורפי ל-X.

<u>הוכחה</u>
תהי $p_X\colon X \times Y \to X$ הטלה של מרחב המכפלה למרחב X.
ההטלה היא פונקצית על.
לפי הגדרת p_X ותנאי הבעיה מתקיים:
$$p_X\big((x_1,y_1)\big) = p_X\big((x_2,y_2)\big) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$$
כלומר p_X מכבדת מאוד את יחס השקילות. אזי קיימת העתקה $h\colon X \times Y \to X$ חח"ע ועל כך ש-$p_X = h \circ \rho$,
כאשר $\rho\colon X \times Y \to (X \times Y)/\sim$ העתקה ששולחת איבר (x,y) למחלקת השקילות $[(x,y)]$ אליה הוא שייך.
כידוע ההטלה p_X היא העתקת על רציפה ופתוחה ולכן היא העתקת מנה. אזי לפי המשפט על העתקות מנה גם h העתקת מנה. אזי העתקת מנה חח"ע h היא הומיומורפיזם. לכן $(X \times Y)/\sim$ הומיאומורפי ל-X, מש"ל.