# תורת הקבוצות — תרגיל בית 10
# פתרונות

חיים שרגא רוזנר

ז' בתמוז, תשע"ה*

**תקציר**

שיקולי עוצמה, קופינליות. הירכיית בורל.

## 1 עוצמות

### תזכורות

1. יהי $\kappa$ מונה אינסופי, ונניח כי עבור כל $\alpha < \kappa$, יש קבוצה $A_\alpha$ המקיימת $|A_\alpha| \leq \kappa$. אזי $\left|\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha\right| \leq \kappa$.
2. יהי $\kappa$ מונה אינסופי, ונניח כי $\gamma < \operatorname{cf}(\kappa)$ סודר כלשהו. נניח כי מתקיים $\left|\bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha\right| = \kappa$. אזי קיים $\alpha \in \gamma$ עבורו $|A_\alpha| = \kappa$.

### תרגילים

1. נסמן $A^* = \bigcup_{n\in\omega} A^n$, כאשר $A^n$ היא קבוצת הסדרות מאורך $n$ של איברי $A$ (=קבוצת הפונקציות מ־$n$ ל־$A$). חשבו את $|A^*|$ בהינתן:
   (א) $A$ ריקה.
   (ב) $A$ סופית לא ריקה.
   (ג) $A$ אינסופית. $|A| = \kappa \geq \omega$.

#### פתרון

(א) נניח $A = \varnothing$. אזי, לכל $0 \neq n \in \omega$, מתקיים $\varnothing^n = \varnothing$. לכן $|\varnothing^*| = \left|\varnothing^0\right| = |1| = 1$.

(ב) כאן, בברור, לכל $0 \neq n \in \omega$ מתקיים $1 \leq |A^n| \in \omega$. האיחוד הזר על $n$ סוכם את כולם. זהו איחוד בן־מניה של קבוצות בנות מניה, ולכן הוא בן־מניה. מנגד, ברור שהוא איחוד אינסופי, כי זה איחוד זר של אינסוף קבוצות לא ריקות. אם כן, $|A^*| = \omega$.

* להגשה עד המבחן, יום שלישי, י"ט במנחם אב (4 אוג') לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

(ג) לכל $\omega \ni n \neq 0$ מתקיים $\left|A^n\right| = \kappa$, ולכן זהו איחוד מעוצמה $\kappa$ של קבוצות מעוצמה $\kappa$, ולפי התזכורת עוצמת איחוד זה היא $\kappa$. ■

# 2 היררכיית בורל

## תזכורות

1. יהי $X$ מרחב טופולוגי. נגדיר, עבור מרחב זה, את סדרות הקבוצות $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha, \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha, \boldsymbol{\Delta}^0_\alpha$[1], ברקורסיה לכל סודר $0 < \alpha < \aleph_1$ (כולן תת־קבוצות של $\mathcal{P}\left(X\right)$):
   - $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ הוא אוסף הקבוצות הפתוחות ב־$X$. $\boldsymbol{\Sigma}^0_1 = \tau$.
   - $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$ הוא אוסף הקבוצות המשלימות את איברי $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$. $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha = \left\{B^{\complement} \colon B \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha\right\}$.
   - עבור $\alpha > 1$, $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ הוא אוסף הקבוצות $A = \bigcup D$ בעבור $D$ בת־מניה המקיימת $D \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \boldsymbol{\Pi}^0_\beta$.

     לשון אחר: $A \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ אם קיימת סדרה בת־מניה $\left\{A_i\right\}_{i\in\omega}$, כאשר לכל $i$ קיים $\beta_i < \alpha$ כך ש $A_i \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\beta_i}$ ומתקיים $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i$. בנוסחא:

$$\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha = \left\{A \colon \forall i < \omega \exists \beta_i < \alpha \exists A_i \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\beta_i}, A = \bigcup_{i<\omega} A_i\right\}$$

   - $\boldsymbol{\Delta}^0_\alpha = \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha \cap \boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$.

2. **$\sigma$־אלגברה** על קבוצה $X$ היא זוג סדור $\left(X, \Omega\right)$ כאשר $\Omega \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$, אשר סגור לאיחודים בני־מנייה ולמשלים.

3. **אוסף קבוצות בורל** של מרחב טופולוגי $X$ הוא $\sigma$־אלגברה מינימלית המכילה את הקבוצות הפתוחות ב־$X$, והוא מסומן $\mathcal{B}\left(X\right)$.

4. לכל מרחב טופולוגי $X$, $\bigcup_{\alpha<\aleph_1} \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha = \mathcal{B}\left(X\right)$.

5. עבור המרחב הטופולוגי הרגיל (האוקלידי) של המספרים הממשיים, $\left|\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\right| = \mathfrak{c}$. במקרה זה ההיררכיה קורסת רק כאשר מגיעים ל־$\aleph_1$.

6. **קבוצת קנטור** $C$ הוגדרה בהרצאה. קבוצת ממשיים זו היא מעוצמה $\mathfrak{c}$ וממידה אפס.

## תרגילים

1. יהי $\alpha$ סודר. הוכיחו כי:

   (א) $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_{\alpha+1}$.

   (ב) $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha \subseteq \boldsymbol{\Pi}^0_{\alpha+1}$.

   (ג) $\boldsymbol{\Delta}^0_\alpha \subseteq \boldsymbol{\Delta}^0_{\alpha+1}$.

[1] האותיות היווניות הללו הן **מודגשות**, וההירכייה כולה נקראת היררכיית בורל המודגשת. ב־[1] ניתן למצוא הסברים על ההיררכייה הבלתי־מודגשת.

**הדרכה** שימו לב לחוקי דה־מורגן.

**פתרון**

(א) יהי $A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. אזי נגדיר סדרה בת־מניה $\forall i,\ A_i = A$. זו סדרה בת־מניה של איברים (לא שונים) של $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$, ומתקיים $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$, ובכך הראנו את ההכלה הנדרשת.

(ב) נשתמש בפעולת המשלים: יהי $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. אזי $A^\complement \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. לפי הסעיף הקודם, מתקיים גם $A^\complement \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$, ולכן $A = A^{\complement\complement} \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$.

(ג) נניח $A \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha$. אזי, לפי הגדרה, $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ וגם $A \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. לפי שני הסעיפים הקודמים, מתקיים $A \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$ וגם $A \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$, ומהגדרת $\mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$, $A \in \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$. ■

2. יהי $\alpha > 1$ סודר. הוכיחו כי:

(א) $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$.

(ב) $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$.

(ג) $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$.

**הדרכה** שימו לב לחוקי דה־מורגן.

**פתרון**

(א) יהי $\alpha > 1$ ונניח $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. אזי קיימת קבוצה בת־מניה $D \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Pi}^0_\beta$ כך ש־$A = \bigcup D$. אם כן, מתקיים גם $D \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha+1} \mathbf{\Pi}^0_\beta$, ולכן ברור ש־$A = \bigcup D \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$.

(ב) דה־מורגן לסעיף הקודם.

(ג) נובע במישרין מהגדרת $\mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}$ ומשני הסעיפים הקודמים. ■

**הערה** במרחב שאינו מקיים $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ עדיין מתקיים $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_3$, ולכן לכל $\alpha \geq 3$ מתקיים $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. ההכלות היחידות שאינן טריוויאליות הן $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ ו־$\mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2$. דוגמא למרחב שאינו מקיים $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ נמצאת ב־[3].
לסיכום, לכל $1 \leq \beta < \alpha \neq 2$ מתקיים $\mathbf{\Sigma}^0_\beta \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ וכן $\mathbf{\Pi}^0_\beta \subseteq \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. לכן הבניה הזו נקראת היררכייה, כי כל רמה מוכלת ברמות הבאות אחריה, ולכל קבוצה באוסף ניתן לשאול באיזו רמה היא מופיעה לראשונה.

**הערה** בכל מרחב מטרי $(X, d)$ מתקיימת ההכלה הבלתי־טריוויאלית $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ (ולכן גם $\mathbf{\Pi}^0_1 \subseteq \mathbf{\Pi}^0_2$).

**הוכחה:** תהי $A \in \mathbf{\Sigma}^0_1$. אזי $A$ פתוחה, ומתקיים

$$A = \left\{x \in X : \forall y \in A^\complement, x \neq y\right\} = \left\{x \in X : \forall y \in A^\complement, d(x,y) > 0\right\}$$
$$= \bigcup_{n\in\omega} \left\{x \in X : \forall y \in A^\complement, d(x,y) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

ניתן להראות בכלים טופולוגיים שכל הקבוצות באיחוד שבאגף ימין הן סגורות, ולכן הן כולן שייכות ל־$\mathbf{\Pi}^0_1$, ואיחודן שייך ל־$\mathbf{\Sigma}^0_2$. מצאנו כי $A \in \mathbf{\Sigma}^0_2$, כנדרש. ■

3. הוכיחו: לכל מרחב טופולוגי $X$, מתקיים

$$\bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{\Delta}^0_\alpha$$

שימו לב כי הטענה כאן נכונה גם אם מחליפים את $\aleph_1$ בכל סודר גבולי.

**פתרון** נניח $x \in \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. אזי קיים $\alpha < \aleph_1$ כך ש־$x \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$. אזי לפי תרגיל 1ב מתקיים $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$. מכיוון ש־$\aleph_1$ הוא גבולי אז $\alpha + 1 < \aleph_1$, ולכן $x \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1} \subseteq \bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. הכיוון השני שקול (בעזרת תרגיל 1א). השויון עם $\bigcup_{\alpha<\aleph_1} \mathbf{\Delta}^0_\alpha$ הוא טריוויאלי.
אכן, התכונה היחידה של $\aleph_1$ בהוכחה היא שאם $\alpha < \aleph_1$ אז גם $\alpha + 1 < \aleph_1$.
תכונה זו נכונה לכל סודר גבולי. ■

4. כמה תת־קבוצות של קבוצת קנטור $C$ יש? כמה מהן מדידות־לבג? כמה מהן ממידה אפס? הסיקו כי יש $2^{\mathfrak{c}}$ קבוצות מדידות לבג על הישר הממשי $\mathbb{R}$, למרות שיש רק $\mathfrak{c}$ קבוצות בורל שם.

**פתרון** נו, באמת. נתתי את זה כתרגיל רק כדי שתשימו לב. ☺

**הערה** לנו קשה לתפוס במחשבתנו קבוצה שאיננה קבוצת בורל, למרות המושג מדידה לבג. אם כן, אנו מפסידים בקוצר מחשבתנו את רוב הקבוצות של $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, או אפילו את רוב המדידות שבהן!

ב ה צ ל ח ה!

## רשימת מקורות


[1] הערך Borel hierarchy בויקיפדיה האנגלית.
.http://en.wikipedia.org/wiki/Borel_hierarchy

[2] הערך Descriptive set theory בויקיפדיה האנגלית.
.http://en.wikipedia.org/wiki/Descriptive_set_theory

[3] Arnold W. Miller, *Descriptive Set Theory and Forcing*: How to Prove Theorems about Borel Sets the Hard Way, Berlin: Springer-Verlag, 1995. chp 2.
הספר זמין באתר האינטרנט של Euclid Project,
.http://projecteuclid.org/euclid.lnl/1235423343