פתרון תרגיל 7

שאלה 1

קבעו התכנסות בהחלט / בתנאי / התבדרות של הטורים הבאים:

.i
$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

פתרון:

בדיקת התכנסות בהחלט: נבצע מבחן השוואה שני עם הטור ההרמוני ונקבל:

$\frac{a_n}{b_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to e$ לכן הטורים מתכנסים ומתבדרים יחד לכן הטור לא מתכנס בהחלט.

בדיקת התכנסות בתנאי: כדי להשתמש במשפט לייבניץ צריך להראות שהסדרה מונוטונית יורדת.

אכן, לכל n מתקיים $n+1>n$ לכן $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ לכן $1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n}$ כלומר $\frac{n+2}{n+1}<\frac{n+1}{n}$, לכן

$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ כלומר $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ כלומר $\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}<\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$ כלומר

$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}<\frac{(n+1)^{n}}{n^{n+1}}$ כלומר $\frac{1}{n+1}\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{n}\frac{(n+1)^{n}}{n^{n}}$ כלומר $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, מש"ל.

.ii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha n)}{n}$, באשר $\alpha \in \mathbb{R}$

<u>פתרון:</u>

אם $\alpha = 2\pi k$ עבור k שלם, הטור הוא הטור ההרמוני המתבדר. נראה כי עבור כל α אחר הטור מתכנס.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n$ באשר $b_n = \cos(\alpha n)$, $c_n = \frac{1}{n}$.

$c_n \to 0$ מונוטונית, לכן אם נראה כי $\sum b_n$ טור חסום, נראה כי הטור המקורי שלנו מתכנס לפי מבחן דיריכלה. אכן, נסתכל על הסכומים החלקיים S_n של הטור $\sum b_n$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\cos(k\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\cos(k\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sin((k+\frac{1}{2})\alpha) - \sin((k-\frac{1}{2}))\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} (\sin((n+\frac{1}{2})\alpha) - \sin\frac{\alpha}{2})$$

(המעבר האחרון כי זה סכום טלסקופי, המעבר הלפני אחרון לפי הנוסחה $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$).

כעת לפי אי שוויון המשולש:

$$\left| \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} (\sin((n+\frac{1}{2})\alpha) - \sin\frac{\alpha}{2}) \right| \le \left| \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \right| \left| (\sin((n+\frac{1}{2})\alpha) - \sin\frac{\alpha}{2}) \right| \le$$

$$\le \left| \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \right| |1+1| = \left| \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \right|$$

לסיכום $|S_n| \le \left| \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \right|$ כלומר אכן $\sum b_n$ טור חסום כדרוש, כלומר אכן הטור המקורי מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

שאלה 2

i. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור מתכנס. כמו כן נתון כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n. הוכיחו כי גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס. (רמז: הסתכלו על הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_1}$).

פתרון: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_1}$ מתכנס כי הוא כפל בקבוע של הטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. מהנתון נקבל: $\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}$, כמו כן: $\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_3}{b_2}\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_1}$. כלומר באותו האופן (באינדוקציה) נראה כי $\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}$ לכל n.

לכן לפי משפט השוואה ראשון של טורים חיוביים נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_1}$ מתכנס.

לכן גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס כי הוא כפל בקבוע של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_1}$.

ii. תלמיד בקורס אינפי' "פתר" את סעיף i. כדלהלן: " $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חיובי מתכנס לכן לפי מבחן דלמבר $\limsup \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$. לכן מהנתון $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכן לפי מבחן דלמבר הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס."
הפתרון שגוי. מה השלב השגוי בפתרון? הסבירו.

פתרון: המעבר הראשון שגוי: אם טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס זה לא אומר ש- $\limsup \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$.

למשל: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס אך $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$ כלומר $\limsup \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$.