נקודות קיצון

15 ביוני 2014

נקודות קיצון מקומיות

הגדרה: תהא $fU \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ נקודה a תקרא מינימום מקומי אם קיים כדור $B = B(a,\delta)$ כך ש

1. $B \subset U$
2. $\forall x \in B : f(a) \leq f(x)$

הערה: באותו אופן מגדירים מקס' מקומי ($f(a) \geq f(x)$), מיני' מקומי חזק ($f(a) < f(x)$), מקס' מקומי חזק ($f(a) > f(x)$)

דוגמא: לפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2$ יש מינ' מקומי חזק ב $a = (0,0)$.

משפט (תנאי הכרחי לקיצון):

תהא $fU \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ ונקודה קיצון שלה a אזי

$$df_a = 0$$

הערה: אם $df_a = 0$ אז a תקרא נקודה קריטית.

הגדרה תהא $fU \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ ונקודה a מטריצת $Hesse$ בנקודה a מוגדרת להיות

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^{n}$$

שזה המטריצה המייצגת של $d^2 f_a$

הגדרה: מטריצה סימטרית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תקרא

1. חיובית ממש ($A > 0$) אם

$$\forall 0 \neq h \in \mathbb{R}^{n\times 1} : h^t A h > 0$$

2. שלילית ממש ($A < 0$) אם

$$\forall 0 \neq h \in \mathbb{R}^{n\times 1} : h^t A h < 0$$

3. מחליפה סימן אם

$$\exists h_1,h_2 : h_1^t A h_1 < 0, h_2^t A h_2 > 0$$

דוגמאות:

- $I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ מטריצה חיובית ממש כי $h^t I h = h_1^2 + h_2^2$
- $A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ מטריצה שלילית ממש כי $h^t A h = -h_1^2 - h_2^2$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ מטריצה מחליפה סימן כי $h^t A h = h_1^2 - h_2^2$ ואז $h_+ = (1,0)$ יתן תוצאה חיובית ו $h_- = (0,1)$ יתן תוצאה שלילית.

קריטריונים

1. קריטריון סלווסטר:
תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$מטריצה סימטרית נסמן את הדטר' של מטריצה $k\times k$ שמתחילה בפינה שמאלית עליונה ב Δ_k

(א) $\Delta_k > 0$ לכל $1 \le k \le n$ $\iff A > 0$

(ב) $(-1)^k \Delta_k > 0$לכל $1 \le k \le n$ $\iff A < 0$ (Δ_k מחליפים סימן)

(ג) $1 \le k \le s,\ \Delta_k > 0, \Delta_{s+1} < 0$ או
$1 \le k \le s,\ (-1)^k \Delta_k > 0, (-1)^{s+1}\Delta_{s+1} < 0$ $\Leftarrow A$ מחליפה סימן

2. קריטריון ע"ע:
תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$מטריצה סימטרית. נסמן את הע"ע שלה ב $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$

3. $A > 0 \iff \forall i : \lambda_i > 0$

4. $A < 0 \iff \forall i : \lambda_i < 0$

5. A מחליפה סימן $\iff \exists \lambda_i > 0, \lambda_j < 0$

משפט: תהא $fU \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ ונקודה קריטית שלה a ($df_a = 0$) אז:

1. $H_f(a) > 0 \Leftarrow a$ מינימום
2. $H_f(a) < 0 \Leftarrow a$ מקס'
3. $H_f(a)$ מחליפה סימן $\Leftarrow a$ לא נקודת קיצון.

דוגמא: מצא נקודות קיצון של

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

פתרון:
נתחיל אם נקודות קריטיות:

$$(f_x, f_y) = \left(6x^2 + y^2 + 10x, 2xy + 2y\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x & = 0 \\ 2xy + 2y & = 0 \end{cases}$$

נמצא פתרונות: אם $y = 0$ אז לפי המשוואה הראשונה $3x^2+5x=0$ כלומר $x = 0, -\frac{5}{3}$ אחרת מהמשוואה השניה נקבל כי $x = -1$ ואז לפי המשוואה הראשונה $y^2 = 4$ כלומר $y = \pm 2$
לסיכום הנקודות הקריטיות הן

$$a_1 = (0,0)\,, a_2 = \left(-\frac{5}{3}, 0\right), a_3 = (-1,2)\,, a_4 = (-1,-2)$$

נבדוק האם הן קיצון ואיזה:

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}$$

נציב את הנקודות

$$H_f(a_1) = \begin{pmatrix} 10 & \\ & 2 \end{pmatrix}$$

זהוי מטריצה חיובית ממש כי 2 ע"ע שלה הם $10, 2$ ולכן a_1 נקודת מיני

$$H_f(a_2) = \begin{pmatrix} -10 & \\ & -1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

זהוי מטריצה שלילית ממש כי 2 ע"ע שלה הם $-10, -1\frac{1}{3}$ ולכן a_2 נקודת מקס

$$H_f(a_3) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -2, \Delta_2 = -16$ כיוון שלא מתקיים שהם חיובים שניהם או ש $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$ נסיק כי a_3 אינה קיצון.
באופן דומה אין קיצון ב a_4
תרגיל: מצא קיצון של הפונקציה

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$

בתחום

$$U=\{(x,y,z)\mid x,y,z>0\}$$

פתרון:
נקודות קריטיות:

$$\triangledown f=(1-\frac{y^2}{4x^2},\frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2},\frac{2z}{y},-\frac{2}{z^2})$$

מוגדר בכל U. נשווה ל־0 ונקבל

$$\begin{cases}1-\frac{y^2}{4x^2}=0 & \Rightarrow y^2=4x^2\Rightarrow y=2x\\ \\ \frac{y}{2x}-\frac{z^2}{y^2}=0 & \Rightarrow y^3=2xz^2\\ \\ \frac{2z}{y},-\frac{2}{z^2}=0 & \Rightarrow z^3=y\end{cases}$$

נציב במשוואה 2 במשוואות האחרות

$$z^9=z^3z^2\Rightarrow z=-1,0,1$$

כיוון ש $z=0,-1$ לא בתחום נשארנו עם $z=1$ זה גורר לפי המשוואות לעיל כי $y=1,x=\frac{1}{2}$.
מסקנה: נקודה קריטית יחידה היא

$$a=\left(\frac{1}{2},1,1\right)$$

נבדוק אם קיצון:

$$H_f(a)=\begin{pmatrix}\frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0\\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2}\\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y}+\frac{4}{z^3}\end{pmatrix}(a)=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

נבדוק Δ_k:

$$\Delta_1=4,\Delta_2=12-4=8$$

$$\Delta_3=|H_f(a)|=|\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ -6 & 7 & 0\end{pmatrix}|=2|\begin{pmatrix}4 & -2\\ -6 & 7\end{pmatrix}|=2(28-12)>0$$

כיוון שכל $\Delta_k>0$ נקבל כי a נקודת מיני'

נקודות קיצון עם תנאים

הגדרה: תהא $fU \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ פונקציה.

$$\begin{cases} \phi_1\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \\ \phi_2\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \\ \vdots \\ \phi_m\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \end{cases}$$

תנאים. (נסמן $(\phi = (\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_m)$). נגדיר $M = \{x \,|\, \phi(x) = 0\}$
נקודה $a \in M$ תקרא מינימום על תנאי M אם קיים כדור $B = B(a, \delta)$ כך ש

1. $B \subset U$
2. $\forall x \in B \cap M : f(a) \leq f(x)$.

הערה: באותו אופן מגדירים מקס' מקומי ($f(a) \geq f(x)$), מיני' מקומי חזק ($f(a) < f(x)$), מקס' מקומי חזק ($f(a) > f(x)$)

דוגמא: לפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2$ יש מינ' מקומי חזק ב $a = (0,0)$. על תנאי $\phi(x+y) = x + y$

אלגוריתם לפתירת קיצון עם תנאים (כופלי לגרנז'):

תהא $fU \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ פונקציה. עם תנאים $\phi = (\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_m)$. נגדיר

$$L = f - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \phi_k$$

כאשר λ_k לעת עתה לא ידועים אזי:

1. נקודות חשודות/קריטיות מתקבלות ע"י פתירת המשוואות

$$\begin{cases} L_{x_1} &= 0 \\ L_{x_2} &= 0 \\ \vdots \\ L_{x_n} &= 0 \\ \phi_1 &= 0 \\ \phi_2 &= 0 \\ \vdots \\ \phi_m &= 0 \end{cases}$$

זה מערכת של $m + n$ משוואות כאשר הנעלמים הם $a_1, a_2, \ldots a_n$ של הנקודה הקריטית ו $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ כופלי לגרנז'

2. אם הנקודה $a = (a_1, \dots a_n)$ היא נקודה קיצון של L אזי היא נקודת קיצון של f על תנאי M. ולכן ניתן להשמש ב $H_L(a)$ כדי לבדוק זאת.
הערה: אם M קבוצה קומפקטית (סגורה וחסומה) ו f רציפה אזי f מקבלת מיני' ומקס' שמה ולכן מיני'/מקס' על כל Mיתקבלו פשוט כמקס'/מיני' של הנקודות החשודות.

תרגיל:

מצא נקודה על האליפסה $x^2 + 2xy + 3y^2 = 9$שהכי קרובה לראשית הצירים.
פתרון: נגדיר $\phi(x, y) = x^2+2xy+3y^2-9$ ונגדיר בעזרתו $M = \{(x, y) \mid \phi(x, y) = 0\}$
נגדיר $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ פונקצית המרחק מראשית הצירים.
כעת התרגיל שקול למצוא נקודות קיצון של f על תנאי M.
בשביל נוחות הפתרון נשים לב כי נקודות אלו הם בדיוק נקודות הקיצון של $f^2 = x^2+y^2$
לפתרון: נגדיר

$$L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 2xy + 3y^2 - 9)$$

ואז מערכת המשוואות שצריך לפתור היא

$$\begin{cases} L_x & = 2x + \lambda(2x + 2y) = 0 \\ L_y & = 2y + \lambda(2x + 6y) = 0 \\ \phi & = x^2 + 2xy + 3y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

נפשט את המשוואות הראשונות

$$\begin{cases} \frac{x}{x+y} = -\lambda \\ \frac{y}{x+3y} = -\lambda \end{cases}$$

שימו לב כי $x + y \neq 0$ כי אחרת $x + y = 0$ ואזי לפי המשוואה הראשונה $x = 0$ ואז לפי המשוואה השלישית $y = \pm\sqrt{3}$ ולא מתקיים $x + y = 0$
באותו אופן כי $x + 3y \neq 0$ כי אחרת $x + 3y = 0$ ואזי לפי המשוואה השניה $y = 0$ ואז לפי המשוואה השלישית $y = \pm 3$ ולא מתקיים $x + 3y = 0$
נמשיך לפתור

$$\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+3y} \Rightarrow x^2 + 3xy = xy + y^2 \Rightarrow x^2 + 2xy - y^2 = 0$$

נחסר את המשוואה

$$x^2 + 2xy + 3y^2 - 9 = 0$$

ונקבל

$$4y^2 - 9 = 0$$

כלומר

$$y = \pm\frac{3}{2}$$

נציב במשוואה השלישית ונקבל כי

$$x^2 \pm 3x + \frac{27}{4} - 9 = 0$$

נפתור ונקבל נקודות חשודות

$$a_1 = \left(\frac{-3+\sqrt{18}}{2}, \frac{3}{2}\right), a_2 = \left(\frac{-3-\sqrt{18}}{2}, \frac{3}{2}\right), a_3 = \left(\frac{3+\sqrt{18}}{2}, -\frac{3}{2}\right), a_4 = \left(\frac{3-\sqrt{18}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

הערך הנמוך בין $f^2(a_i)$ הוא $f^2(a_1) = f^2(a_4) = 2.636$ ולכן a_1, a_4 הם נקודות מיני' של f בתנאי M

הערך הגבוה בין $f^2(a_i)$ הוא $f^2(a_2) = f^2(a_3) = 15.36$ ולכן a_2, a_3 הם נקודות מקס' של f בתנאי M

תרגיל: מצא את המקס' של הפונקציה $f(x,y,z) = x + -2y + 2z$ בתנאי של הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

פתרון: נגדיר

$$L(x,y,z) = x + -2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

ואז מערכת המשוואות שצריך לפתור היא

$$\begin{cases} L_x = & 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = & -2 + 2\lambda y = 0 \\ L_z = & 2 + 2\lambda z = 0 \\ & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

כיוון ש $x, y, z \neq 0$ (אחרת נקבל סתירה לאחת משלושת המשוואות הראשונות) נוכל לפשט

$$\begin{cases} -\lambda = \frac{1}{2x} \\ -\lambda = -\frac{1}{y} \\ -\lambda = \frac{1}{z} \end{cases}$$

ואז

$$z = -y = 2x$$

נציב במשוואה האחרונה ונקבל

$$x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow z = \pm\frac{2}{3}, y = \mp\frac{2}{3}$$

הנקודות הקריטיות (עם ה λ המתאימה) הן

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \lambda_1 = -\frac{3}{2}$$

$$a_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \lambda_2 = \frac{3}{2}$$

נבדוק אם קיצון בעזרת H_L :

$$H_L = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

ולכן

$$H_L(a_1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

כיוון ש

$$\Delta_1 = -3 < 0, \Delta_2 = 9 > 0, \Delta_3 = -27 < 0$$

נקבל כי $H_L(a_1)$ מטריצה שלילית ולכן a_1 מקס' של L ולכן נקודה מקס של f עם תנאי
באותו רעיון

$$H_L(a_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כיוון ש

$$\Delta_1 = 3 > 0, \Delta_2 = 9 > 0, \Delta_3 = 27 > 0$$

נקבל כי $H_L(a_2)$ מטריצה חיובית ולכן a_2 מיני' של L ולכן נקודה מיני' של f עם תנאי

קיצונים גלובליים

משפט: תהא $f : K \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה כאשר $K \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית (סגורה וחסומה) אז f מקבלת שם מיני' ומקס' (הכללה של משתנה 1 שפונקציה רציפה מקבלת מיני' ומקס' על קטע סגור).

בהנתן שזה המצב האלגוריתם למציאת נקודות המיני' ומקס' מתבצע כך:

1. מציאת נקודות קיצון מקומיות. הנקודות הרלוונטיות הן הנקודות שמתקבלות בפנים של K
2. מציאת נקודות קיצון על תנאי - כאשר התנאי הוא השפה של K
3. מיני' והמקס' מתקבלות כמיני' ומקס' של ערכי הנקודות שנמצאו בסעיפים קודמים

תרגיל (ממבחן תשעג)

מצא מקס' ומינ' של הפונקציה $f(x,y)=xy$ בתחום האליפסה $\{(x,y)\mid \frac{1}{4}x^2+4y^2\leq 1\}$

פתרון:

נקודות קיצון מקומיות:

$$df_a=(y,x)$$

לכן נקודה חשודה יחידה היא $a=(0,0)$. והיא אכן בפנים $\{(x,y)\mid \frac{1}{4}x^2+4y^2<1\}$

נבדוק אם קיצון:

$$H_f(a)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

למטריצה זו 2 ע"ע ± 1 ולכן זוהי מטריצה מחליפה סימן ולכן $a=(0,0)$ אינה נקודת קיצון.

נקודות קיצון על השפה $\{(x,y)\mid \frac{1}{4}x^2+4y^2=1\}$:

נבנה פונקצית לגרנז

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda(\frac{1}{4}x^2+4y^2-1)$$

ואז

$$\begin{cases} L_x=y+\lambda\frac{x}{2} & =0 \\ L_y=x+\lambda 8y & =0 \\ \frac{1}{4}x^2+4y^2-1 & =0 \end{cases}$$

מהמשוואות הראשונות נקבל כי $x,y\neq 0$ כי אחרת נקבל ששניהם שווים 0 ואז זה יהיה סתירה למשוואה השלישית. לכן מהמשוואות הראשונות נקבל כי

$$-\lambda=\frac{2y}{x}=\frac{x}{8y}$$

ולכן

$$16y^2=x^2\Rightarrow y=\pm\frac{x}{4}$$

נציב במשוואה השלישית ונקבל

$$4y^2+4y^2=1\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{8}}\Rightarrow x=\pm\frac{4}{\sqrt{8}}$$

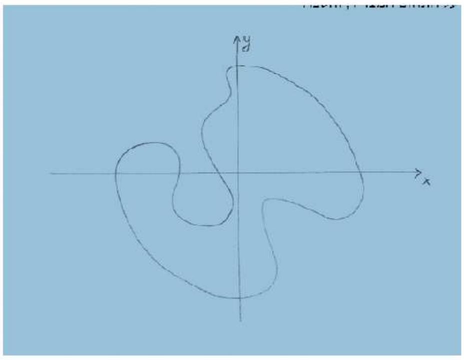
כלומר 4 הנקודות החשודות הן

$$a_i=\left(\pm\frac{4}{\sqrt{8}},\pm\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$$

בנקודות אלו הפונקציה שווה

$$f(a_i) \in \left\{ \pm\frac{4}{\sqrt{8}} \cdot \pm\frac{1}{\sqrt{8}} = \pm\frac{1}{2} \right\}$$

ולכן המקס' (הגלובלי) של הפונקציה הוא $\frac{1}{2}$ והמינ' (הגלובלי) הוא $-\frac{1}{2}$
תרגיל (ממבחן תשעג)
סמן בקירוב את נקודות המקס' והמינ' של הפונקציה $f(x,y) = x + y$ על התחום המצויר. הסבר תשובתך



פתרון:

$$df_a = (1,1)$$

הגרדי' לא מתאפס ולכן אין נקודות קיצון בפנים התחום.

לכן נקוד' הקיצון נמצאות על השפה של התחום.
נשים לב כי לאורך קווים שמקבלים לישר

$$y = -x$$

הפונקציה מקבלת ערך קבוע. אם יורדים למטה מקו זה אז ערך הפונקציה יורד וכאשר עולים מעל קו זה ערך הפונקציה עולה.
לכן נקודות הקיצון יהיו הנקודות שבהם המשיק מקביל לקו

$$y = -x$$

ואם גרף התחום עובר מתחת לקו זה נקודת מקס ואם גרף התחום עובר מעל קו זה זה נקודת מינ'.