בסיס ומימד

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי (או תת מרחב) מעל $\mathbb{F}$. קבוצה $B \subset V$ תקרא בסיס אם

1. B בת"ל
2. B פורשת את המרחב, כלומר $span(B) = V$

הגדרה: המימד של V הוא $dim_{\mathbb{F}}V = |B|$ (מספר האיברים ב B) כאשר B הוא בסיס. אם $dim_{\mathbb{F}}V < \infty$ אזי V יקרא נוצר סופית.

משפט: ההגדרה של מימד מוגדרת היטב ואינה תלויה בבחירת הבסיס. כלומר כל שתי בסיסים B, B' בעלי אותה עוצמה (בעלי אותו מספר איברים).

משפט: לכל מרחב וקטורי **קיים** בסיס

דוגמאות:

בסיסים סטנדרטים:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

1. $V = \mathbb{R}^3$ אזי $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס. (המימד 3)

בהכללה הבסיס הסטנדרטי ל $V = \mathbb{F}^n$ הוא $B = \{e_i | 1 \leq i \leq n\}$ ("וקטורי היחידה")

2. $V = \mathbb{C}^{3\times2}$ אזי

$B = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס.

(המימד הוא $3 \cdot 2 = 6$)

בהכללה: הבסיס הסטנדרטי ל $V = \mathbb{F}^{m\times n}$ הוא $B = \{E_{i,j} | 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ ("מטריצות היחידה")

3. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים מדרגה 2 מעל. בסיס $B = \{1, x, x^2\}$ (מימד 2+1)

בהכללה הבסיס הסטנדרטי ל $V = \mathbb{F}_n[x]$ הוא $B = \{1, x, x^2, \cdots x^n\}$

4. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x]$. הבסיס $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4 \ldots\}$ הוא בסיס אינסופי.

5. לפי הגדרה, הבסיס למרחב האפס $\{0\}$ הוא הקבוצה הריקה $B = \emptyset$

הערה: $\{0\}$ **אינו** בסיס כי כל קבוצה המכילה את 0 היא תלויה לינארית

תכונה חשובה של בסיס

תרגיל: יהא V מרחב וקטורי, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס.

אזי כל $v \in V$ **ניתן** להציג כצ"ל של B **בצורה יחידה**.

הוכחה

יהי $v \in V$

1. כיון ש-B פורשת את V, קיים צ"ל של B = v
2. יחידות: נניח שני צ"ל: $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

נעביר אגף: $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0$

כיון ש-B בת"ל, צ"ל של $v_i \in B$ שנותן 0 יהיה רק הטריוויאלי

$\alpha_i - \beta_i = 0 \ \forall_{1 \le i \le n} \longrightarrow \alpha_i = \beta_i$

מש"ל

הגדרה יהא V מרחב וקטורי, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ויהי $v \in V$. ההצגה של v לפי בסיס B הוא וקטור המקדמים בצ"ל. כלומר $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ אמ"מ $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

קריטריונים שקולים לבסיס:

בהגדרה של תלות לינארית ראינו שאפשר לראות תלות לינארית בתור היכולת לזרוק וקטורים מבלי להשפיע על המרחב הנפרש.

הטענה הנ"ל באופן פורמאלי היא הטענה הבאה:

טענה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. תהא $S=\{v_1,\dots v_n\}$ קבוצה ונניח כי קיים i כך ש v_i תלוי באחרים.

אזי $span(S)=span(S\setminus\{v_i\})$

כמובן שלפעולה זו יש סוף - מתישהו לא ניתן לזרוק אף וקטור מבלי לגרוע מהמרחב הנפרש. הקבוצה שנשארנו איתה תהיה בסיס.

זוהי בניה "מלמעלה ללמטה". כלומר מתחילים עם V ו"זורקים" וקטורים כמה שניתן.

בניה נוספת היא בניה "מלמטה למעלה". מתחילים עם הקבוצה הריקה *ומוסיפים* וקטורים כך שהקבוצה המתקבלת היא בת"ל. כמובן שגם לפעולה זאת יש סוף (אחרי מספר צעדים השווה למימד של המרחב) - מתי שלא ניתן להוסיף אף וקטור מבלי לגרוע מ"בת"ליות" הקבוצה, הגענו לבסיס.

בניה זאת מתבססת על הטענה הבאה:

טענה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא $S=\{v_1,\dots v_n\}$ קבוצה בת"ל.

אם קיים $v\in V\setminus span(S)$ אז $S'=\{v_1,\dots v_n,v\}$ בת"ל גם כן.

הוכחה:

כדי להוכיח בת"ל ערך צ"ל $=0$ נניח שבה"כ אזי $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n+\alpha v=0$

$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=-\alpha v \longrightarrow \frac{\alpha_1}{-\alpha}v_1+\dots+\frac{\alpha_n}{-\alpha}v_n=v$

קיבלנו צ"ל של S שנותן את v, בסתירה לכך ש$v\in V\setminus span(S)$

לכן חייב להיות $\alpha=0$.

$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=$

ידוע $v_1\dots v_n$ בת"ל $\longleftarrow$ $\alpha,\alpha_1\dots\alpha_n=0$

לסיכום:

משפט: יהיה $B \subset V$ אזי התנאים הבאים שקולים:

1. B בסיס.
2. B קבוצה בת"ל מקסימאלית
3. B קבוצה פורשת את V- מינימאלית.

מסקנה חשובה ממפרק זה היא

1. כל קבוצה B בת"ל ניתן **להשלים** לבסיס
2. לכל קבוצה פורשת S קיימת **תת קבוצה** שהיא בסיס

תרגיל

מצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{cccc} & & t & s \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מציבים:

$x_1 - t = 0 \longrightarrow x_1 = t$

$x_2 + s = 0 \quad x_2 = -s$

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ -s \\ t \\ s \end{pmatrix} : t,s \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\Downarrow$$

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל

מצא בסיס לתת המרחב $\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\}span$ של $V=\mathbb{R}^3$

פתרון:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{דירוג}]{} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

קיבלנו שורת אפסים

כלומר הוקטור השלישי. ת"ל בשניים הראשונים

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}\right\}$$ בסיס

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$ (סטנדרטי)

תרגיל

תרגיל: $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$. השלם את $S = \{v_1 = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\}$ לבסיס

$$span(S) = \left\{\begin{pmatrix}b+2c & b\\ c & d\end{pmatrix} \middle| b,c,d\in\mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

1. S בת"ל

2. $span(S) \not\ni v_4 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ ולכן $S\cup\{v_4\}$ גם בת"ל (הוכחנו קודם)

$B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ב-4 איברים, בת"ל $\Longrightarrow$ בסיס ל-V

(שלוש חוקים)

תרגיל חשוב

יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיה $W \le V$ תת מרחב מאותו מימד סופי(נסמן $dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{F}}W = n$).

הוכח: $W = V$

נבחר $B=\{w_1 \dots w_n\}$ בסיס ל-W

1. $span(B)=W$
2. B בת״ל.

עפ״ שלב. חיום, B בת״ל $W=span(B)=V \leftarrow span(B)=V \leftarrow \#B=n=dimV +$

משפט המימדים

משפט המימדים:

יהי V מ"ו ויהיו $U, W \leq V$ תתי מרחבים. אזי

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

סקיצה של ההוכחה - לא מפחיד כמו שנהוג לחשוב

1. ניקח בסיס לU חיתוך W. נסמן אותו ב$\{v_1, \ldots, v_k\}$
2. נשלים אותו לבסיס לU. נסמן $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m\}$
3. נשלים את הבסיס לחיתוך גם לבסיס לW. נסמן $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_p\}$
4. **נוכיח** (וזה עיקר העבודה) שהקבוצה $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_p\}$ הינה בסיס לU+W:
   1. נראה כי כל וקטור מהצורה u+w ניתן להצגה כצירוף לינארי של איברים אלה (זה ברור)
   2. נראה כי הקבוצה הזו בת"ל, אחרת וקטורים שהנחנו שאינם בחיתוך יהיו חייבים להיות בחיתוך בסתירה
5. המשל נובע בקלות מספירת הוקטורים בבסיסים שכן $dim(U + W) = k + m + p = (k + m) + (k + p) - k$

תרגיל 8.3

יהא V מ"ו ממימד 5, ויהיו U ממימד 3 ו-W ממימד 4 תתי מרחבים של V. מהן האפשרויות עבור $dim(U \cap W)$? הוכח!

$dim(U+W) = dim(U)+dim(W)-dim(W\cap W)$

$U+W \subseteq V \longrightarrow dim(U+W) \leq 5 = dim(V)$

$5 \geq dim(U+W) = 3+4-dim(U\cap W)$

$dim(U\cap W) \geq 2$

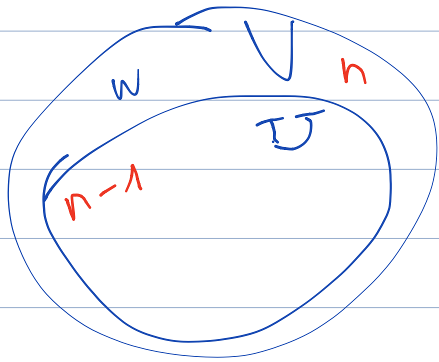
מצד שני $U\cap W \subseteq U \leftarrow dim(U) \geq dim(U\cap W)$

$2 \leq dim(U\cap W) \leq 3$

תרגיל 8.5

יהא V מ"ו ממימד n, ויהיו U, W תתי מרחבים כך ש $dimU = n - 1$ ו-W אינו מוכל בU.
הוכח כי $V = U + W$

הוכחה



נוכיח באמצעות משפט המימדים

$$\dim(U+W)=\dim(V)$$

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$$

ידוע $W \not\subseteq U$ $\dim(W)-\dim(U\cap W)\geq 1 \Leftarrow \dim(U\cap W)<\dim(W) \Leftarrow U\cap W\neq W$

$$\dim(U+W)=n-1+\dim(W)-\dim(U\cap W)\geq n-1+1=n$$

$$\dim(U+W)\geq n=\dim(V)$$

$$\dim(U+W)\leq n \Leftarrow U+W\subseteq V$$

$$\dim(U+W)=n=\dim(V)$$

קואורדינטות

נסתכל $\mathbb{R}^2$

$\binom{1}{0}\binom{0}{1} = B_1$

$\binom{1}{0}\binom{1}{1} = B_2$

$\left[\binom{2}{2}\right]_{B_1} = \binom{2}{2} \Rightarrow 2\cdot\binom{1}{0}+2\binom{0}{1}$

$\left[\binom{2}{2}\right]_{B_2} = \binom{0}{2} \Rightarrow 0\binom{1}{0}+2\binom{1}{1}$

משפט: יהא V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס ל-V ויהי $v \in V$ וקטור. ראינו ש-v ניתן להצגה יחידה כצ"ל של B וההצגה שלו לפי הבסיס הוא וקטור שמורכב מהמקדמים של הצ"ל. באופן פורמאלי, ההצגה של v לפי בסיס B הוא **וקטור הקואורדינטות** המסומן $[v]_B \in \mathbb{F}^n$ ומוגדר להיות $[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ כאשר $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$.

חשוב לזכור $[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ אם"ם $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$

תרגיל: הוכח כי לכל בסיס B מתקיים

$v = 0$ אם"ם $[v]_B = 0$.

הוכחה: ישירות מההגדרה. B בת"ל ולכן הצ"ל היחידי שמתאפס זהו הצ"ל הטריאלי.

בהכללה:

$v_1 = v_2$ אמ"מ $[v_1]_B = [v_2]_B$

הערה: במרחבים הוקטוריים שאנו נעבוד איתם יש **בסיסים סטנדרטיים**. הייחוד של הבסיסים הסטנדרטיים הוא שקל מאד לחשב קואורדינטות לפיהם. נסתכל במרחבים וקטורים ובבסיסים הסטנדרטיים שלהם:

מרחב וקטורי	בסיס סטנדרטי
$\mathbb{F}^n$	$(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$
$\mathbb{F}^{m\times n}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{F}_n[x]$	$1, x, x^2, \ldots, x^n$

דוגמא. חשב את הקואורדינטות של הוקטור $v = 1 + 2x - x^2$ לפי הבסיס הסטנדרטי S של $\mathbb{R}_3[x]$. למעשה הפולינום כמעט מוצג כצירוף לינארי של איברי הבסיס:

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 1\cdot 1 + 2\cdot x + (-1)\cdot x^2 + 0\cdot x^3$.

לפיכך $[v]_S = (1, 2, -1, 0)$.

דוגמא. חשב את הקואורדינטות של הוקטור (a, b, c) לפי הבסיס הסטנדרטי S של $\mathbb{F}^n$.

דוגמא. $V = \mathbb{R}^2, B = \{(1,1),(1,-1)\}$ מצא את הקואורדינטות של הוקטור $v = (a, b)$ לפי הבסיס B.

הגדרה : יהא V מ"ו (או תת מרחב) ויהי B בסיס לו. אזי מרחב הקורדינאנטות (של V לפי בסיס B) הוא

$$[V]_B = \{[v]_B \mid v \in V\}$$

הערה : יהא V מ"ו, $W_1, W_2 \leq V$ תתי מרחבים ו B בסיס. אזי

1. $[W_1 \cap W_2]_B = [W_1]_B \cap [W_2]_B$
2. $[W_1 + W_2]_B = [W_1]_B + [W_2]_B$

דוגמאות:

חיתוך תת מרחבים

תרגיל 7.31

נגדיר שני תתי מרחבים של $\mathbb{R}_3[x]$:

$U = \{p(x)|p(1) = 0\}$ ו $V = \{p(x)|p(2) = 0\}$,

מצא את המימד של חיתוך המרחבים.

פתרון.

$p(x) = a+bx+cx^2+dx^3$ $\quad$ $p\in U \Leftrightarrow a+b+c+d=0$

$p\in V \Leftrightarrow a+2b+4c+8d=0$

$[U]_S = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 : a+b+c+d=0\right\}$

$[V]_S = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 : a+2b+4c+8d=0\right\}$

$\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix}1&2&4&8\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0\right\} = [U]_S \cap [V]_S$

מדרגים, מקבלים פתרון כל:

$(2t+6s, -3t-7s, t, s) = t$

מרחב הקואורדינטות $B = \left\{\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-7\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$U\cap V = \mathrm{span}\{2-3x+x^2, 6-7x+x^3\}$

אלגוריתם למציאת חיתוך בין שני תתי מרחבים U,W

ישנן שתי שיטות לחשב את החיתוך, נתחיל בראשונה (שביצענו הרגע, למעשה):

1. החלף את U, W במרחב הקורדינאטות שלהם.
2. מצא מערכת משוואות המתארת את U ומערכת משוואות המתארת את W
3. פתור מערכת אחת המכילה את כל המשוואות משתי המערכות וקבל את החיתוך
4. חזור ל U, W המקוריים.

שיטה שנייה:

1. החלף את U, W במרחב הקורדינאטות שלהם.
2. הצג את המרחבים כ $span(?)$
3. כתוב צירוף לינארי כללי בU וצירוף לינארי כללי בW
4. השווה את הצירופים ופתור מערכת משוואות על **הסקלרים**
5. הצב את הסקלרים שקיבלת בצירוף הלינארי וקבל את החיתוך
6. חזור ל U, W המקוריים.

תרגיל =

מצא את החיתוך בין תתי המרחבים הבאים בשיטה השנייה לעיל.

$$B = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right), C = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

פתרון.

אלגוריתם לבדיקת תלות לינארית בין וקטורים

1. הפוך את הוקטורים לוקטורי קואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי המתאים
2. שים את וקטורי הקואורדינטות ב**שורות** מטריצה A
3. הבא את המטריצה לצורה מדורגת
4. אם באיזה שלב קיבלת שורת אפסים סימן שהוקטורים תלויים לינארית
5. אם הגעת לצורה מדורגת ללא שורת אפסים סימן שהוקטורים בלתי תלויים לינארית

ובדרך הנוספת

1. הפוך את הוקטורים לוקטורי קואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי המתאים
2. שים את וקטורי הקואורדינטות ב**עמודות** מטריצה A
3. בדוק אם יש פתרון לא טריאלי למערכת $Ax=0$
4. אם יש אז הם תלויים ואם אין אז הם בת"ל

דוגמא.

האם הפולינומים $v_1=1+x^2, v_2=1-x, v_3=x+x^2$ תלויים לינארית?

סטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$ $S=\{1,x,x^2\}$

$[v_1]_S=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, [v_2]_S=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, [v_3]_S=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

שורת אפסים ⟵ ת"ל

דרך נוספת - לשים $[v_1]_S[v_2]_S[v_3]_S$ בעמודות של A

$$\underbrace{\begin{pmatrix}| & | & | \\ [v_1]_S & [v_2]_S & [v_3]_S \\ | & | & |\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}_{x}=\vec{0}$$

הוקטורים בת"ל ⟺ הפתרון היחיד ל $Ax=0$ הוא הטריויאלי

אלגוריתם לחישוב צירוף לינארי

1. נתון וקטור b וקבוצת וקטורים. העבר את כולם לוקטורי קואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי המתאים
2. פתור את המערכת Ax=b כאשר **עמודות** A הינן וקטורי הקואורדינטות של קבוצת הוקטורים הפורשים
3. אם אין פתרון, b לא נפרש על ידי האחרים
4. אם קיים פתרון x אזי הוא מכיל את הסקלרים של הצירוף הלינארי בהתאם לסדר העמודות בA