# פתרון מבחן מועד א' – חדו"א 2 לאודיסאה –04/07/22

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. נביט בפונקציה

$$f(x) = \arctan(x^2)$$

א. מצאו את טור הטיילור סביב אפס המתכנס ל$f(x)$.

ראשית נשים לב כי

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

הטור ההנדסי דיי דומה לזה

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

נציב במקום המשתנה את $-x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

נחשב אינטגרל $\int_0^x$

קודם על צד שמאל:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x)$$

ולכן

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

לבסוף נציב $x^2$ במקום המשתנה

$$\arctan(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

ב. חשבו את $f^{(38)}(0)$.

נזכור שלפי טיילור המקדם בטור טיילור של $x^{38}$ הוא

$$\frac{f^{(38)}(0)}{38!}$$

ומצד שני, רואים שבטור הטיילור שחישבנו בסעיף א' מתקיים כי האיבר בחזקת 38 מתקבל כאשר האינדקס הוא $n = 9$ והוא

$$\frac{(-1)^9}{18+1}x^{38}$$

לכן סה"כ

$$f^{(38)}(0) = -\frac{38!}{19}$$

2. נביט בסדרת הפונקציות

$$f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקצית הגבול של הסדרה $f(x)$.

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\cdot x = x$$

הטיעון הזה תקף לכל $x \neq 0$

עבור $x = 0$ מתקיים $f_n(0) = 0$ ולכן סה"כ $f(x) = x$ לכל $x \in \mathbb{R}$ וזה תחום ההגדרה.

ב. קבעו והוכיחו אם הסדרה מתכנסת במידה שווה בתחום $(-\infty,\infty)$.

$$d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x\right| = \infty$$

ולכן הסדרה אינה מתכנסת במ"ש.

הסבר?

$$\left|n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq n$$

ולכן

$$\lim_{x\to\infty} n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x = -\infty$$

3. תהי $u(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית שאינה קבועה אפס, ותהי $f(x)$ פונקציה גזירה המקיימת לכל $x$ כי $u(x,f(x))=0$.

א. הוכיחו כי לכל $x$ אם $u_y(x,f(x))\neq 0$ אזי $f'(x)=-\frac{u_x(x,f(x))}{u_y(x,f(x))}$.

ראשית נסמן

$$h(x)=u(x,f(x))$$

וכיוון ש$u$ דיפרנציאבילית וכן $f$ גזירה לפי כלל השרשרת

$$h'(x)=u_x(x,f(x))\cdot 1+u_y(x,f(x))\cdot f'(x)$$

אבל נתון כי $h(x)=0$ תמיד! ולכן כמובן גם נגזרתו שווה אפס

$$u_x(x,f(x))\cdot 1+u_y(x,f(x))\cdot f'(x)=0$$

לפי הנתון הביטוי הימני בצד השמאלי שונה מאפס ולכן מותר לחלק בו ונקבל

$$f'(x)=-\frac{u_x(x,f(x))}{u_y(x,f(x))}$$

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $u_x(a,f(a))=0$ אזי $f'(a)=0$.

נבחר בפונקציה

$$u(x,y)=y^2-x^2$$

$$u_x=-2x$$

וב$a=0$

מתקיים כי $u_x(0,f(0))=0$

עבור $f(x)=x$

$$f'(0)=1\neq 0$$

4. נביט בפונקציה $f(x,y)=x^2+x^3-y+y^3+1$

א. מצאו את הכיוון בו הנגזרת מקסימלית בנקודה $(1,1)$.

הנגזרת מקסימלית בכיוון הגרדיאנט ולכן

$$\vec{v}=\nabla f(1,1)$$

נחשב את זה

$$f_x=2x+3x^2$$

$$f_y=-1+3y^2$$

$$\vec{v} = \nabla f(1,1) = \left(f_x(1,1), f_y(1,1)\right) = (5,2)$$

ב. מצאו ומיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x,y)$ (מקס' מקומי, מינ' מקומי, אוכף).

ראשית הנק' הקריטיות הן הנק' בהן הגרדיאנט מתאפס, קרי

$$\begin{cases} 2x + 3x^2 = 0 \\ -1 + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x(2 + 3x) = 0$$

$$x = 0, -\frac{2}{3}$$

סה"כ 4 נקודות

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

כעת נחשב את

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$$

$$f_{xx} = 2 + 6x$$

$$f_{yy} = 6y$$

$$f_{xy} = 0$$

$$\Delta(x,y) = (2 + 6x)6y$$

$$\Delta\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 \cdot \pm\frac{6}{\sqrt{3}}$$

ולכן $\left(0, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ היא אוכף

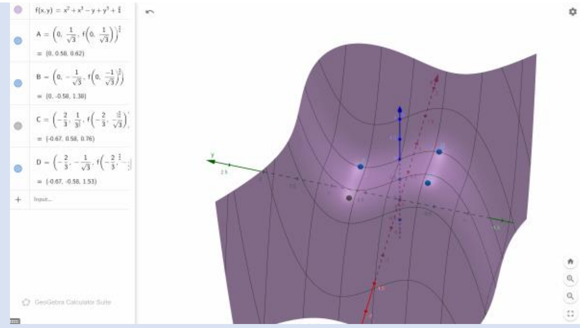
והנק' $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ היא קיצון, וכיוון ש $0 < f_{xx}\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ זה מינימום

כעת

$$\Delta\left(-\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2 \cdot \pm\frac{6}{\sqrt{3}}$$

הפעם $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ואוכף ואילו

$\left(-\frac{2}{3}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ קיצון וכיוון ש $0 > f_{xx}\left(-\frac{2}{3}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ מדובר במקס מקומי.



5. יהי בית שתחום הרצפה שלו הוא $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ וגובה התקרה שלו הוא $f(x,y) = e^x$.
מצאו את שטח הפנים הכולל של הבית (רצפה, קירות ותקרה).

נתחיל מהרצפה, כי זה בפער הכי קל:

<u>הרצפה</u>:

הרצפה היא סה"כ ריבוע עם צלע באורך 1 ולכן שטחו הוא 1.

<u>הקירות</u>:

צריך 4 פרמטריזציות, לכל אחד מן הקירות. הכיוון לא משנה כיוון שזה אינטגרל קווי מסוג ראשון.

הקיר הצפוני בין $(0,1),(1,1)$ נסמנו ב$C_1$

$$\overrightarrow{r_1}(t) = (t,1), t \in [0,1]$$

$$\int_{C_1} f(x,y)dr = \int_0^1 f\left(\overrightarrow{r_1}(t)\right) \cdot \left|\overrightarrow{r_1'}(t)\right| dt = \int_0^1 e^t \cdot \sqrt{1^2+0^2}dt = [e^t]_0^1 = e-1$$

הקיר המערבי

$$\overrightarrow{r_2}(t) = (0,t), t \in [0,1]$$

$$\int_{C_2} f(x,y)dr = \int_0^1 f\left(\overrightarrow{r_2}(t)\right) \cdot \left|\overrightarrow{r_2'}(t)\right| dt = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{0+1^2}dt = [t]_0^1 = 1$$

הקיר הדרומי

$$\overrightarrow{r_3}(t) = (t,0), t \in [0,1]$$

$$\int_{C_3} f(x,y)dr = \int_0^1 f\left(\overrightarrow{r_3}(t)\right) \cdot \left|\overrightarrow{r_3'}(t)\right| dt = \int_0^1 e^t \cdot \sqrt{1^2+0^2}dt = [e^t]_0^1 = e-1$$

הקיר המזרחי

$$\overrightarrow{r_4}(t) = (1,t), t \in [0,1]$$

$$\int_{C_4} f(x,y)dr = \int_0^1 f\left(\overrightarrow{r_4}(t)\right) \cdot \left|\overrightarrow{r_4'}(t)\right| dt = \int_0^1 e \cdot \sqrt{0^2+1^2}dt = [et]_0^1 = e$$

סה"כ שטח הקירות הוא

$$e-1+1+e-1+e=3e-1$$

<u>התקרה</u>:

כעת צריך אינטגרל משטחי מסוג ראשון של הפונקציה 1 על המשטח $M$ שהוא גרף הפונקציה והפרמטריזציה שלו היא:

$$\vec{s}(x,y)=\big(x,y,f(x,y)\big),\qquad (x,y)\in D$$

$$\iint_M 1dS=\iint_D 1\cdot\left|\vec{s}_x\times\vec{s}_y\right|dxdy=\int_0^1\int_0^1 1\cdot\sqrt{(-e^x)^2+0^2+1^2}dxdy$$

כיוון ש

$$\vec{s}_x\times\vec{s}_y=\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & e^x\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=(-e^x,0,1)$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^1\sqrt{e^{2x}+1}dx=\left\{\begin{gathered} t=\sqrt{e^{2x}+1}\\ t^2=e^{2x}+1\\ e^{2x}=t^2-1\\ 2x=\ln(t^2-1)\\ x=\frac{\ln(t^2-1)}{2}\\ dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt\end{gathered}\right\}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} t\cdot\frac{t}{t^2-1}dt\ =\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt\ =$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}}\left[1+\frac{1}{t^2-1}\right]dt$$

$$\frac{1}{t^2-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}=\frac{A(t+1)+B(t-1)}{t^2-1}$$

$$1=A(t+1)+B(t-1)$$

נציב $t=\pm1$ ונקבל כי

$$A=\frac{1}{2},\qquad B=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{t^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]$$

ולכן שטח התקרה הוא

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}}\left[1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]\right]dt\ =\left[t+\frac{1}{2}\ln(t-1)-\frac{1}{2}\ln(t+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}}$$

סה"כ שטח הפנים של הבית הוא הזוועה האחרונה ועוד $3e$.

6. נביט במשטחים

$$M = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$$
$$T = \left\{(x, y, z)|z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right\}$$

ובשדה הוקטורי

$$\vec{F} = x\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + \hat{k}$$

נשים לב כי המשטח $M$ הוא מעגל ברדיוס 2 המוכל במישור $xy$.

כמו כן, המשטח $T$ הוא החצי העליון של הספירה שמרכזה ראשית הצירים ורדיוסה 2.

שני המשטחים ביחד סוגרים מעטפת (אך זה לא לגמרי רלוונטי לתרגיל), ויש להם שפה משותפת (וזה כן רלוונטי).

כיוון שמדובר באינטגרל משטחי מסוג שני על הרוטור, נשתמש במשפט סטוקס ונאמר שזה האינטגרל הקווי מסוג שני של הפונקציה של השדה הוקטורי על השפה, ולכן מספיק לחשב את אחד האינטגרלים משני הסעיפים בלבד.

כמו כן צריך לשים לב לכיוון המסילה, כיוון ששני הנורמלים באותו הכיוון (כלפי מעלה) נלך על המסילה באותו הכיוון בשני האינטגרלים והם אכן שווים.

כמו כן, במקום לחשב כל אחד מהאינטגרלים הללו, מותר לחשב את האינטגרל הקווי לפי סטוקס.

א. חשבו את האינטגרל המשטחי מסוג שני $\iint_M rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS$, כאשר הנורמל בעל רכיב ציר $z$ חיובי.

בהתאם להסברים לעיל נחשב את

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

כאשר $C$ היא שפת המשטחים נגד כיוון השעון (הסטנדרטי) ולכן הפרמטריזציה של השפה היא

$$\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 0)$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (2\cos(t), 0, 1) \cdot (-2\sin(t), 2\cos(t), 0) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -4\cos(t)\sin(t)\, dt = -2\int_0^{2\pi} \sin(2t)\, dt = [\cos(2t)]_0^{2\pi} = 0$$

ב. חשבו את האינטגרל המשטחי מסוג שני $\iint_T rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS$, כאשר הנורמל בעל רכיב ציר $z$ חיובי.

התשובה היא אפס לפי ההסברים לעיל.