פתרון בוחן 2 בקורס מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

הוראות כתבו באופן ברור שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
משך הבוחן: 90 דקות. לאחר מכן יינתנו 15 דקות נוספות לטובת סריקת הקבצים והעלאתם למודל.
סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
חומר עזר: אסור.

בהצלחה!

שאלה 1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. יהי R תחום אוקלידי עם פונקציה אוקלידית d, ויהיו $0 \neq a, b \in R$. אז $a \sim b$ אם ורק אם $d(a) = d(b)$. (20 נקודות)

ב. יהי R תחום שלמות. אם $p \in R$ הוא איבר ראשוני, אז p הוא איבר ראשוני ב-$R[x]$. (20 נקודות)

פתרון.

א. לא נכון. למשל, ניקח $R = \mathbb{Q}[x]$ עם פונקציית הדרגה, $a = x$ ו-$b = x + 1$. אז $d(a) = 1 = d(b)$, אבל $a \nsim b$ כי האיברים ההפיכים היחידים ב-R הם $\mathbb{Q}^\times$, ו-a ו-b אינם נבדלים זה מזה על ידי כפל בקבוע.

ב. נכון. אפשר להוכיח את זה ישירות מההגדרה של ראשוניות, אבל זה קצת יותר קשה. נוכיח במקום זאת ש-$\langle p \rangle$ הוא אידאל ראשוני ב-$R[x]$. אכן, נגדיר $\varphi : R[x] \to \left({}^{R}/_{Rp}\right)[x]$ לפי

$$.\varphi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + Rp)\, x^i$$

זהו הומומורפיזם על עם $\ker \varphi = \langle p \rangle$, ולכן ממשפט האיזומורפיזם הראשון $^{R[x]}/_{\langle p \rangle} \cong \left({}^{R}/_{Rp}\right)[x]$. אבל p ראשוני ב-R, לכן $^{R}/_{Rp}$ תחום שלמות, ומכאן שגם $\left({}^{R}/_{Rp}\right)[x]$ תחום שלמות, כלומר $\langle p \rangle$ אידאל ראשוני ב-$R[x]$.

שאלה 2.

א. מצאו שני פירוקים לא שקולים של 8 ב-$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-7}\right]$, והסיקו כי $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-7}\right]$ אינו תחום פריקות יחידה. (20 נקודות)

ב. החוג $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$ הוא דווקא כן תחום פריקות יחידה (אין צורך להוכיח את זה). הסבירו מדוע הפירוקים שמצאתם בסעיף א' לא סותרים את העובדה הזו, ומצאו את הפירוק של 8 למכפלה של גורמים אי-פריקים בחוג $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$. (20 נקודות)

פתרון.

א. נתבונן בשני הפירוקים $8 = 2\cdot 2\cdot 2 = \left(1+\sqrt{-7}\right)\left(1-\sqrt{-7}\right)$. נטען כי האיברים המופיעים בשני הפירוקים הם אי-פריקים ואינם חברים.
לצורך כך, ניזכר בנורמה $N\left(a+b\sqrt{-7}\right) = a^2+7b^2$. זה צמצום של הנורמה הרגילה של המרוכבים ל-$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-7}\right]$, ולכן היא כפלית.
<u>טענה 1:</u> בחוג $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-7}\right]$ אם הנורמה של איבר היא 1, אז האיבר הפיך.
הוכחה: $N\left(a+b\sqrt{-7}\right) = \left(a+b\sqrt{-7}\right)\left(a-b\sqrt{-7}\right) = 1$.
<u>טענה 2:</u> בחוג $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-7}\right]$ אין איברים מנורמה 2.
הוכחה: קל לראות שלמשוואה $N\left(a+b\sqrt{-7}\right) = a^2+7b^2 = 2$ אין פתרונות עבור $a,b\in\mathbb{Z}$.
כעת נוכל לחזור לשאלה. 2 אי-פריק, כי אם $2=\alpha\beta$ אז $N(\alpha)N(\beta) = N(2) = 4$.
אבל אין איברים מנורמה 2, לכן $N(\alpha)=1$ או $N(\beta)=1$, כלומר α או β הפיכים.
זה מראה ש-2 אי-פריק.
בדומה עבור $1\pm\sqrt{-7}$: $N\left(1\pm\sqrt{-7}\right) = 8$, לכן בכל פירוק של האיברים האלו יהיה חייב להיות איבר מנורמה 1, כלומר הפיך. זה מראה שגם הם אי-פריקים.
הפירוקים האלו לא שקולים כי האורך שלהם שונה. זה מראה ש-$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-7}\right]$ אינו תחום פריקות יחידה.

ב. קודם כל, נשים לב שהאיברים של החוג הם

$$a\cdot 1 + b\cdot\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$$

לכל $a,b\in\mathbb{Z}$. אפשר להגדיר עליו נורמה דומה לסעיף הקודם: $N(z) = z\overline{z} = |z|^2$.
זו שוב תהיה נורמה כפלית. נטען שהנורמה של כל איבר ב-$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right]$ היא עדיין שלמה; אכן,

$$N\left(a+b\cdot\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right) = \left(a+b\cdot\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)\left(a+b\cdot\frac{1-\sqrt{-7}}{2}\right) = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{b}{2}\right)^2 =$$
$$= a^2+ab+\frac{b^2}{4}+\frac{7b^2}{4} = a^2+ab+2b^2.$$

בדומה לסעיף הקודם, גם פה איבר יהיה הפיך אם ורק אם הוא מנורמה 1. הפירוקים שמצאנו בסעיף א' לא יסתרו את הטענה הזו כי האיברים שכתבנו בהם פריקים. למשל,

$$1+\sqrt{-7} = 2\cdot\frac{1+\sqrt{-7}}{2}.$$

נשים לב שהאיבר החדש שהוספנו הוא מנורמה 2:

$$N\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$$

בפרט הוא לא הפיך. לכן

$$\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{-7}}{2} = 2.$$

זה הפירוק של 2 לאי-פריקים, כי בכל פירוק של $\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}$ למכפלה של שני איברים אחד יהיה בהכרח מנורמה 1, לכן הפיך. מכאן שהפירוק של 8 הוא

$$8 = \left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{-7}}{2}\right)^3.$$

שאלה 3. יהי R תחום שלמות, ותהי $S \subseteq R$ תת-קבוצה סגורה לכפל כך ש-$0 \notin S$ ו-$1 \in S$. הראו שכל אידאל $J \lhd S^{-1}R$ הוא מהצורה

$$J = S^{-1}I = \left\{\frac{a}{s} \mid a \in I, s \in S\right\}$$

לאיזשהו אידאל $I \lhd R$ כך ש-$I \cap S = \varnothing$, ושאם J ראשוני אפשר לבחור את I להיות ראשוני.

(רמז: הראו כי $\frac{r}{s} \in J$ אם ורק אם $\frac{r}{1} \in J$.) (30 נקודות)

הוכחה. יהי $J \lhd S^{-1}R$ אידאל. נשים לב כי לכל $r \in R$ ו-$s \in S$, אם $\frac{r}{s} \in J$ אז גם $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{1} = \frac{r}{1} \in J$, ובכיוון השני אם $\frac{r}{1} \in J$ אז $\frac{r}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{r}{s} \in J$.

נגדיר $I = \left\{r \in R \mid \frac{r}{1} \in J\right\}$, ונראה שזה האידאל הדרוש. קודם כל, זה אידאל: $0 \in I$ כי $\frac{0}{1} \in J$; הוא סגור לחיסור כי אם $a, a' \in I$ אז $\frac{a-a'}{1} = \frac{a}{1} - \frac{a'}{1} \in J$; והוא מקיים בליעה כי אם $a \in I$ ו-$r \in R$ אז $\frac{ar}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{r}{1} \in J$ מהבליעה של J. לכן I אידאל.

נראה כי $J = S^{-1}I$. בכיוון $\boxed{\subseteq}$, אם $\frac{r}{s} \in J$ אז מהטענה שהוכחנו $\frac{r}{1} \in J$, לכן $r \in I$, כלומר $\frac{r}{s} \in S^{-1}I$. בכיוון $\boxed{\supseteq}$, אם $a \in I$ אז $\frac{a}{1} \in J$, ולכל $s \in S$ מתקיים $\frac{a}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s} \in J$. זה מראה את השוויון.

כעת נניח ש-J ראשוני, ונראה ש-I ראשוני. נעבוד לפי ההגדרה: נניח $ab \in I$. לכן $\frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \in J$. מהראשוניות של J, $\frac{a}{1} \in J$ או $\frac{b}{1} \in J$, לכן $a \in I$ או $b \in I$. זה מראה ש-I אידאל ראשוני, כנדרש. $\square$