תזכורת: בוחן ביום שנית 21.12 , בשעה $14:00$.
חומר: עד התרגול הקודם כולל. כלומר, מבחינת הנושאים של התרגול זה עד חבורות מנה כולל, לא כולל משפטי איזומורפיזם. עד תירגול 7.
כל מה שלמדתם בהרצאה ותירגלנו כמובן רלוונטי.
נושאים שעשינו בתרגול ולא בהרצאה- כן לבוחן. למשל, S_n, D_n.
נושאים מההרצאה שלא תורגלו- לא לבוחן.
הבוחן מגן.
יום רביעי הבא: נעשה תרגול חזרה לבוחן. תביאו שאלות.
תרגיל: תהי G חבורה ו$H \trianglelefteq G$ מאינדקס n. הוכיחו שלכל $g \in G$ מתקיים ש $g^n \in H$.
הוכחה: אז נסתכל על G/H, בגלל שH נורמלית, G/H היא חבורה, והגודל של חבורת המנה שווה לאינדקס של H בG כלומר לn. אז G/H היא חבורה מגודל n. אז ידוע שהסדר של כל איבר בG/H מחלק את n, כלומר כל איבר בחזקת n שווה ליחידה.
יהי $g \in G$. נסתכל על gH, זה איבר בG/H.

$$(gH)^n = e_{G/H} = H$$

$$(gH)^n = g^n H$$

כלומר,

$$g^n H = H$$

זה קורה אמ"ם $g^n \in H$.
משפט האיזומורפיזם הראשון:
$f : G \to H$ הומומורפיזם. אז

$$G/\ker f \cong Imf$$

במילים אחרות: אם $f : G \to K$ אפימורפיזם, אז

$$G/\ker f \cong K$$

שאלות בסגנון: נתונה חבורה G ותת חבורה נורמלית H וחבורה שלישית K, ואתם צריכים להוכיח ש$G/H \cong K$.
בשביל זה כל מה שצריך זה למצוא אפימורפיזם $f : G \to K$ שהגרעין שלו הוא H.
דוגמאות: $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ו$H = \{(x, y) : x - 3y = 0\}$. הוכיחו

$$G/H \cong \mathbb{R}$$

פתרון:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x - 3y$$

קל לראות שזה שומר על חיבור ולכן הומומורפיזם. כמו כן, קל לראות ש$H = \ker f$. צריך להוכיח שf אפימורפיזם. לכל x אפשר לקחת למשל $(x,0)$.

תרגיל: סימון: $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. הוכיחו ש$\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong\mathbb{T}$.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{T}$$

$$f(x)=e^{2\pi ix}$$

הגרעין זה כל הxים כך ש $e^{2\pi ix}=1$ וזה קורה רק עבור כפולה שלמה של 2π. כלומר $x\in\mathbb{Z}$.

ברור שזה על, כי כל מספר מרוכב ניתן להצגה כ $e^{y+2\pi ix}$, כאשר e^y זה הנורמה. אז אם הנורמה היא 1 $y=0$. כלומר, בעצם כל המספרים מנורמה 1 ניתנים להצגה כ $e^{2\pi ix}$.

תרגיל: יהי $f:\mathbb{Z}_{14}\to D_{10}$ הומומורפיזם. מיצאו את כל האפשרויות ל$\ker f$.

פתרון:

$$\mathbb{Z}_{14}/\ker f\cong Im(f)$$

אנחנו יודעים שתמונה של הומומורפיזם היא תת חבורה. לכן $|Im(f)|\mid 20$. בנוסף, בגלל ש $|Im(f)|=|\mathbb{Z}_{14}/\ker f|$ אז $|Im(f)|\mid 14$. אז נשארנו עם $1,2$.

אם $|Im(f)|=1$ זה אומר ש$Im(f)=\{e\}$ כלומר ההומומורפיזם הטריוויאלי (תמיד קיים, בין כל שתי חבורות).

במקרה זה $\ker f=\mathbb{Z}_{14}$.

נשאלת השאלה האם קיים הומורפיזם שהתמונה שלו היא מגודל 2 .

נשלח את האיזוגיים לτ ואת הזוגיים לe.

זה אכן יוצא הומומורפיזם.

$$f(x)=\tau^x$$

במקרה זה הגרעין זה הזוגיים כלומר $2\mathbb{Z}_{14}$. ראינו שהגרעין חייב להיות מאינדקס 2, כלומר תת חבורה עם 7 איברים.

$\mathbb{Z}_{14}$ היא ציקלית, אז כל תת החבורות שלה הם ציקליות, כלומר $\langle n\rangle$, $o(n)=\dfrac{14}{gcd(n,14)}$,

לכן כדי לקבל חבורה עם 7 איברים צריך לקחת את n להיות זוגי שונה מ0. כל איבר זוגי יוצר את אותה חבורה.

$$\langle 2\rangle=\langle 4\rangle=...=\langle 12\rangle$$

כולן יוצרות תת חבורה עם 7 איברים (כי היוצר מסדר 7) אבל כולן מוכלות ב$\langle 2\rangle$ אז כולן שוות ל$\langle 2\rangle$.

תרגיל: יהיו $(|G_1|,|G_2|)=1$ מצאו את כל ההומורפיזמים האפשריים $f:G_1\to G_2$.

פתרון: ההומורפיזם הטריוויאלי $f(g)=e$ תמיד קיים.

$$|Im(f)|\mid|G_2|$$

כי $Im(f) \leq G_2$.
מצד שני

$$G_1/\ker f \cong Imf$$

זה אומר ש $|G_1/\ker f| = |Im(f)|$.

$$|G_1/\ker f| = \frac{|G_1|}{|\ker f|}$$

כלומר

$$|G_1| = |\ker f||Im(f)|$$

$$|Im(f)| \mid |G_1|$$

לכן $|Im(f)|$ מחלק את $(|G_1|, |G_2|) = 1$. ולכן $|Im(f)| = 1$. כלומר $Im(f) = \{e\}$. וזה קורה רק עבור ההומורפיזם הטריוויאלי.

משפט האיזומורפיזם השני: תהי G חבורה, $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$.
$H \cap N \trianglelefteq H$.
$HN = \{hn : h \in H, n \in N\}$

$$h_1 n_1 h_2 n_2 = h_1 h_2 n' n_2$$

$$Nh_2 = h_2 N$$

$$(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}n'$$

$$Nh^{-1} = h^{-1}N$$

מתקיים:

$$H/H \cap N \cong HN/N$$

דוגמא: $G = \mathbb{Z}$ $H = 6\mathbb{Z}, N = 15\mathbb{Z}$

$$H \cap N = 30\mathbb{Z}$$

$$H + N = 3\mathbb{Z}$$

$$6\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_5$$

$$15\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$$

משפט ההתאמה: תהי G חבורה ו$N \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית. אז תת החבורות של G/N הן כל התת חבורות מהצורה H/N כאשר $N \leq H \leq G$. ותתי החבורות הנורמליות מתקבלות כאשר בוחרים H נורמלית.

זאת התאמה חח"ע ועל.

תרגיל: תהי $N \trianglelefteq G$ מאינדקס p (ראשוני) ו$K \leq G$ הוכיחו כי $K \leq N$ או $G = NK$ ו $[K : K \cap N] = p$.

פתרון: $N \leq NK \leq G$

$$\frac{|G|}{|N|} = p$$

$$|N| \mid |NK| \mid |G|$$

נובע ש $|NK| = |N| \vee |G|$ ולכן נקבל ש $NK = G$ או $NK = N$.

כעת בלי להניח שG סופית. אז $N \leq NK \leq G$ ולכן $NK/N \leq G/N$. G/N היא חבורה מסדר p. לכן תת החבורות היחידות הן G/N והטריוויאלית. כלומר $NK/N = G/N \vee N/N$. אבל ההתאמה היא חח"ע לכן $NK = G \vee N$.

המקרה השני קורה אמ"ם $K \leq N$.

אם $G = NK$ אז ממשפט האיזו השני

$$G/N \cong K/K \cap N$$

ולכן

$$[K : K \cap N] = [G : N] = p$$

משפט האיזומורפיזם השלישי: $G \trianglelefteq H \leq N$ ו$N \trianglelefteq G$.

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H$$

כפליות האינדקס: אם $N \leq K \leq G$

$$[G : N] = [G : K][K : N]$$

הדגמה: $G = \mathbb{Z}$ ו$N = 30\mathbb{Z}$.

מי הן תתי החבורות של G/N?

נשתמש במשפט ההתאמה. זה חבורות מהצורה H/N כאשר $N \leq H \leq G$.

$$H = n\mathbb{Z}$$

כאשר $n \mid 30$

$$2\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$$

$$5\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$$

$$15\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$$

ממשפט האיזומורפיזם השלישי נובע:

$$(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$$

הגדרה: חבורה נקראת חבורה פשוטה אם אין לה תתי חבורות נורמליות חוץ מהטריוויאליות (החבורה עצמה ו-$\{e\}$)

למשל: כל חבורה מסדר ראשוני היא פשוטה כי אין לה בכלל תתי חבורות לא טריוויאליות.

A_n פשוטה לכל $n \geq 5$ (כנראה שתראו בהמשך). יש לה תתי חבורות. אבל אין תתי חבורות נורמליות.

הערה: אם G חבורה ו-$N \trianglelefteq G$ אז G/N היא חבורה פשוטה אמ"ם אין תתי חבורות נורמליות של G שמכילות את N. כלומר, N היא תת חבורה נורמלית מקסימלית.

אז לכל חבורה ניתן ליצור באופן זה את כל המנות הפשוטות שלה.

למשל, כל המנות הפשוטות של $\mathbb{Z}$ זה

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

כי תתי החבורות המקסימליות של $\mathbb{Z}$ הן $p\mathbb{Z}$.