משוואות לינאריות עם מקדמים אנליטיים

משוואה לינארית מסדר n היא:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)$$

אומרים שהמשוואה היא עם מקדמים אנליטיים אם $a_0(x), ...a_n(x)$ גזירים לכל הסדר-ים עם טור טיילור עם רדיוס התכנסות גדול מ0.

תזכורת: רדיוס התכנסות של $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: קיים R כך שהתור מתכנס אם $|x| < R$ ומתבדר אם $|x| > R$.

דוגמה: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$, $R = 1$

נסתכל רק על $n = 2$:

$$y'' + P(x)\, y + Q(x)\, y = 0$$

$P(x)$ אנליטי עם רדיוס התכנסות R_1(מסביב ל0)
$Q(x)$ אנליטי עם רדיוס התכנסות R_2(מסביב ל0)

משפט(לא נוכיח)

קיימים שני פתרונות אנליטיים בת"ל עם רדיוס התכנסות לפחות $\min(R_1, R_2)$

דוגמאות

(1) $y'' + y = 0$
פתרון כללי: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ - רדיוס התכנסות ∞

(2) $y'' + xy' + 2y = 0$. נחפש פתרון בצורה $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y' = \sum_{n=0(n=1)}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0(n=2)}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0$$

טור חזקות שווה 0 אמ"ם כל מקדם הוא 0.
<u>מקדם של x^0</u>: $2a_2 + 2a_0 = 0$

מקדם של x^1: $6a_3 + 3a_1 = 0$
מקדם של x^2: $12a_4 + 4a_2 = 0$
מקדם של x^n: $(m+2)(m+1)a_{m+2} + (m+2)a_m = 0$

$\boxed{a_{m+2} = \frac{-a_m}{m+1}}$ - כלל נסיגה. a_0, a_1 חופשיים - בהינתן a_0, a_1 מוצאים את כל שאר המקדמים דרך כלל הנסיגה.
זוהי מד"ר ממעלה 2, לכן אנו רוצים שתי פתרונות בת"ל.
$a_0 = 1, a_1 = 0$ נותן פתרון אחד - $a_1 = a_3 = a_5 = ... = 0$

$$a_2 = -1, a_4 = \frac{1}{3}, a_6 = \frac{-1}{3 \cdot 5}, a_{8=}\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$a_0 = 0, a_1 = 1$ נותן פתרון שני: $a_0 = a_2 = a_4 = ... = 0$

$$a_1 = 1, a_3 = -\frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{2 \cdot 4}, a_7 = \frac{-1}{2 \cdot 4 \cdot 6}, ...$$

באופן כללי(עבור הפתרון השני)

$$a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^p p!}$$

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2^p p!}$$

ניתן לבדוק רדיוס התכנסות ∞. לכן

$$y_o = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2^p p!} = x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{-x^2}{2} \right)^p = xe^{-x^2/2}$$

(המקרה יוצא דופן שניתן לחשב את הסכום)
לכן הפתרון האי זוגי הוא $y_o = xe^{-x^2/2}$.
עבור הפתרון הזוגי:

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{2^p p!}{(2p)!}$$

$$y_e = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p 2^p p! x^{2p}}{(2p)!}$$

רדיוס התכנסות ∞
פתרון כללי - צירוף ליארי של y_o וy_e

(3) $(1-x^2)y'' - 2xy' + Cy = 0$, C קבוע. ננרמל:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{C}{1-x^2}y = 0$$

רדיוס התכנסות של המקדמים הוא 1. נחפש פתרון בצורה $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}$$

נחזור לצורה המקורית של המשוואה(לפני החילוק ב-$1-x^2$)

$$\left(1-x^2\right)\sum_{n=2}^{\infty}=n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}Ca_nx^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\left(-n\left(n-1\right)-2n+C\right)=0$$

נסתכל על מקדם של x^m ($m=0,1,2,...$)

$$\left(m+2\right)\left(m+1\right)a_{m+2}-\left(m^2+m-C\right)a_m=0$$

$$\boxed{a_{m+2}=\frac{m^2+m-C}{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}a_m}$$

גם פה אם ניקח $a_0=1,a_1=0$ יננצר פתרון זוגי y_e ואם ניקח $a_0=0,a_1=1$ נייצר פתרון אי זוגי y_o
יש לשים לב ש

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+2}}{a_m}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{m^2+m-C}{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}\right|=1$$

מרמז שרדיוס ההתכנסוות 1. <u>אבל יש מקרה יוצא דופן</u>! נניח $C=p\left(p+1\right)$ כאשר p שלם

$$a_{m+2}=\frac{m\left(m+1\right)-p\left(p+1\right)}{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}a_m=\frac{\left(m-p\right)\left(m+p+1\right)}{\left(m+1\right)\left(m+2\right)}a_m$$

במקרה זה($C=p\left(p+1\right)$) יש פתרון פולינומי מסדר p.

$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+p\left(p+1\right)y=0$ נקראת <u>משוואת לז'נדר מדרגה p</u>. ($p=0,1,2,...$).
הפתרון הפולינומי מדרגה p של משוואה זו נקרא <u>פולינום לז'נדר מדרגה p</u>

$$P_0\left(x\right)=1$$

$$P_1\left(x\right)=x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

(4) $y'' + e^x y = 0$

מחפשים פתרון בצורה $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = 0$$

נסתכל על המקדם של x^m:

$$(m+2)(m+1) a_{m+2} + \sum_{r=0}^{m} \frac{a_{m-r}}{r!} = 0$$

$$\begin{array}{ll} m=0 & 2a_2 + a_0 = 0 \\ m=1 & 6a_3 + a_1 + a_0 = 0 \\ m=2 & 12a_4 + a_2 + a_1 + \frac{a_0}{2} = 0 \end{array}$$

a_0, a_1 חופשיים. ניתן לבחור $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 0 \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$ לייצר שני פתרונות בת"ל.

במקרה זה אין חלוקה לפתרונות זוגיים ואי זוגיים.

גם כאן רדיוסה התכנסות ∞ - קשה להראות.

משוואת אויילר

משוואת אויילר מסדר 2

$$\alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = 0$$

תזכורת

- משוואה כללית מסדר 2: $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$
- מקדמים קבועים - a_0, a_1, a_2 קבועים.
- אויילר: $a_2(x) = \alpha x^2$, $a_1(x) = \beta x$, $a_0(x) = \gamma$ (קבוע)

איך פותרים? ננסה $y=x^{\lambda}$, λ קבוע.

$$y'=\lambda x^{\lambda-1}$$

$$y''=\lambda\left(\lambda-1\right)x^{\lambda-2}$$

$$\alpha\lambda\left(\lambda-1\right)x^{\lambda}+\beta\lambda x^{\lambda}+\gamma x^{\lambda}=0$$

יש לבחור λ כך ש$\alpha\lambda\left(\lambda-1\right)+\beta\lambda+\gamma=0$

1. אם יש שני פתרונות ממשיים λ_1,λ_2. פתרון כללי: $y=C_1x^{\lambda_1}+C_2x^{\lambda_2}$
2. אם יש שני פתרונות מרוכבים צמודים $p\pm iq$. פתרון כללי:

$$y=Cx^{p+iq}+\overline{C}x^{p-iq}=x^{p}\left(Cx^{iq}+\overline{C}x^{-iq}\right)$$

$$=x^{p}\left(Cx^{iq}+\overline{C}x^{-iq}\right)=x^{p}\left(Ce^{iq\ln x}+\overline{C}e^{-iq\ln x}\right)$$

$$=x^{p}\left(D_1\cos\left(q\ln x\right)+D_2\sin\left(q\ln x\right)\right)$$

(D_1,D_2 קבועים ממשיים, C קבוע מרוכב)

3. פתרון λ כפול. ניתן לפתור ע"י הורדת סדר פתרון כללי

$$y=x^{\lambda}\left(C_1+C_2\ln x\right)$$

משוואת אויילר מסדר n

$$\alpha_nx^ny^{(n)}+\alpha_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+...+\alpha_1xy'+\alpha_0y=0$$

מחפשים פתרונות בצורה $y=x^{\lambda}$, מוצאים (עד) n אפשרויות לλ.

שים לב

משוואת אויילר ניתן לכתוב בצורה

$$y''+\frac{\beta}{\alpha}\frac{y'}{x}+\frac{\gamma}{\alpha}\frac{y}{x^2}=0$$

$$y''=P\left(x\right)y'+Q\left(x\right)y=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}P\left(x\right)=\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{1}{x}\\ Q\left(x\right)=\dfrac{\gamma}{\alpha}\dfrac{1}{x^2}\end{array}\right.$$ - לא אנליטיות ב$x=0$.

הגדרה

למשוואה $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ אומרים ש$x=a$ היא נקודה <u>אורדינרית</u>(ordinary point) אם $P(x)$, $Q(x)$ רציפות בa. אחרת אומרים ש$x=a$ היא נקודה <u>סינגולרית</u>(singular point).

אם $x=a$ היא נקודה סינגולרית אבל הגבולות $\begin{matrix}\lim_{x\to a}(x-a)P(x)\\ \lim_{x\to a}(x-a)^2Q(x)\end{matrix}$ קיימים, אזי $x=a$ היא נקודה <u>רגולרית סינגולרית</u>(regular singuler point) אחרת היא נקודה <u>לא רגולרית סינגולרית</u>(irregular singular point)

במחצית הראשונה של השיעור למדנו שאם P,Q אנליטיים ב$x=a$, אזי הפתרון של המדר אנליטיים ב$x=a$.

משפט פרוביניוס Frobenius

אם $x=a$ היא נקודה רגולרית סינגולרית, והפונקציות $(x-a)P(x)$ ו$(x-a)^2Q(x)$ הן אנליטיות אזי קיים לפחות פתרון אחד של המד"ר בצורה

$$y=(x-a)^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$$

$\alpha,a_0,a_1,a_2,...$ קבועים.(α לא בהכרח שלם! או אפילו ממשי)

דוגמאות של נקודות רגולריות סינגולריות

1. $y''+\frac{\beta}{\alpha}\frac{y'}{x}+\frac{\gamma}{\alpha}\frac{y}{x^2}=0$ - מש' אויילר.
   $x=0$ נק. רג. סינג.

$$P(x)=\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{x},Q(x)=\frac{\gamma}{\alpha}\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}xP(x)=\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\lim_{x\to0}x^2Q(x)=\frac{\gamma}{\alpha}$$

2. $y''+\frac{2}{x}y'+\frac{3}{(x-1)^3x}y=0$
   נק. סינגולרית $x=0,1$
   $x=0$ נק. רג. סינג.
   $x=1$ נק. לא רג. סינג.

לסדר n

$$a_n(x)\,y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+...+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=0$$

לנק. רג. סינג. צריך קיום של גבולות

$$\lim_{x\to a}\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}(x-a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a_{n-2}(x)}{a_n(x)}(x-a)^2$$

$$\vdots$$

$$\lim_{x\to a}\frac{a_0(x)}{a_n(x)}(x-a)^n$$

דוגמה למשפט פרוביניוס

$$9x^2y''+(x+2)\,y=0$$

$x=0$ נק. רג. סינג.
נחפש פתרון בצורה

$$y=x^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha}$$

כאשר $a_0\neq 0$(כדי שx^{α} תהיה החזקה הראשונה)

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)\,a_nx^{n+\alpha-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)\,a_nx^{n+\alpha-2}$$

$$\overbrace{\sum_{n=0}^{\infty}9(n+\alpha)(n+\alpha-1)\,a_nx^{n+\alpha}}^{9x^2y''}+\overbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\alpha+1}}^{xy}+\overbrace{\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^{n+\alpha}}^{2y}=0$$

נצמצם x^{α}, ונצרף סכומים ראשון ושלישי

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[9(n+\alpha)(n+\alpha+1)+2\right]a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

- מקדם של x^0 - מהסכום הראשון בלבד

$$\left[9\alpha\left(\alpha-1\right)+2\right]a_0=0$$

יודעים ש$a_0\neq0$ ולכן $\alpha^2-\alpha+\frac{2}{9}=0$. זאת המשוואה שקובעת את α, והיא נקראת המשוואה המציינת(The indicial equation)

שתי אפשרויות לα: $\alpha=\frac{1}{3},\alpha=\frac{2}{3}$. עם קצת מזל כל אחד יתן פתרון.

- מקדם של x^m ($m=1,2,3,...$)

$$\left[9\left(m+\alpha\right)\left(m+\alpha-1\right)+2\right]a_m+a_{m-1}=0$$

- $\alpha=\frac{1}{3}$

$$\left[9\left(m+\frac{1}{3}\right)\left(m-\frac{2}{3}\right)+2\right]a_m+a_{m-1}=0$$

$$\left(9m^2-3m\right)a_m+a_{m-1}=0$$

$$a_m=\frac{-a_{m-1}}{3m\left(3m-1\right)}$$

- $a=\frac{2}{3}$

$$\left[9\left(m+\frac{2}{3}\right)\left(m-\frac{1}{3}\right)+2\right]a_m+a_{m-1}=0$$

$$\left(9m^2+3m\right)a_m+a_{m-1}=0$$

$$a_m=\frac{-a_{m-1}}{3m\left(3m+1\right)}$$

לוקחים בשני המקרים פתרון מ$a_0=1$,... הפתרון מהצורה

$$x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

בסוף - צירוף לינארי.