אלגברה מופשטת 1

תרגול 8

הגדרה: $\varphi : A \to A$ פונקציה. איבר $a \in A$ נקרא נקודת שבת אם $\varphi(a) = a$.

תרגיל:

תהא G חבורה סופית ו$\varphi \in Aut(G)$ אוטומורפיזם שנקודת השבת היחידה שלו היא איבר היחידה של G. הוכיחו:

א.לכל $g \in G$ קיים $x \in G$ כך ש$g = x^{-1}\varphi(x)$;

ב.אם $\varphi \circ \varphi = Id_G$ אזי G אבלית.

פתרון:

א. נתבונן בפונקציה $f : G \to G$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^{-1}\varphi(x)$. נוכיח שf חח"ע: נניח שf(a)=f(b) כלומר $a^{-1}\varphi(a) = b^{-1}\varphi(b)$

$\Leftarrow ba^{-1} = \varphi(b)\varphi(a)^{-1}$ ז"א $ba^{-1} = \varphi(ba^{-1}) \Leftarrow$ ba^{-1} היא נקודת שבת של φ ולכן $ba^{-1} = e$

ולכן $b = a \Leftarrow$ f חח"ע ולכן f על ולכן לכל $g \in G$ קיים $x \in G$ כך ש $f(x) = g \Rightarrow x^{-1}\varphi(x) = g$.

ב. $g = x^{-1}\varphi(x)$. נפעיל φ: $\varphi(g) = \varphi(x^{-1}\varphi(x)) = \varphi(x^{-1})\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x^{-1})x = \varphi(x)^{-1}x = (x^{-1}\varphi(x))^{-1} = g^{-1} \Leftarrow \varphi(g) = g^{-1}$.

יהיו $a, b \in G$ וצ"ל: $ba = ab$.

$\varphi((ab)^{-1}) = ab$ ומצד שני $\varphi((ab)^{-1}) = \varphi(b^{-1}a^{-1}) = \varphi(b^{-1}) \cdot \varphi(a)^{-1} = ba \Leftarrow ab = ba$.

מ.ש.ל $\square$.

אוטומורפיזמים פנימיים - Inner Automorphisms

הגדרה: תהא G חבורה, $a \in G$. אוטומורפיזם $\gamma_a(x) = axa^{-1}$ נקרא אוטומורפיזם פנימי או אוטו' ההצמדה. נסמן: $Inn(G) = \{\gamma_a : a \in G\}$. הוכחתם בהרצאה: $Inn(G) \triangleleft Aut(G)$.

טענה: ניתן להגדיר הומומורפיזם: $F : G \to Inn(G), a \mapsto \gamma_a$ (כאשר γ_a פונקציה)

$Ker(F) = \{a \in G : \gamma_a = Id_g\} = \{a \in G : \gamma_a(x) = x \forall x \in G\} =$

$$\{a\in G: axa^{-1}=x\forall x\in G\}=\{a\in G: ax=xa\forall x\in G\}=Z(G)$$

לפי איזו 1:

$G/_{Z(G)}\cong Inn(G)$ כאשר $Z(G)=\{g\in G: gx=xg\forall x\in G\}\leftarrow$ זה אומר למשל ש$Inn(G)$ אינה ציקלית! [כי הוכחנו ש$G/_{Z(G)}$ איננה ציקלית].

<u>תרגיל:</u>

תהא $G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}: a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$. חשבו $|\ Inn(G)\ |$.

<u>פתרון:</u>

למעשה נחשב $|\ G/_{Z(G)}\ |=?$. $|\ G\ |=27$. נראה מהו $|\ Z(G)\ |$:

$|\ Z(G)\ |\in\{1,3,9,27\}$

- $|\ Z(G)\ |\neq 27$ כי החבורה איננה אבלית.
- $|Z(G)|\neq 1$ כי למשל $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in G$ (בדקו !)
- אם $|Z(G)|=9$ אז $|G/_{Z(G)}|=\frac{27}{9}=3$ לא יתכן כי כל חבורה מסדר ראשוני היא ציקלית ו$G/_{Z(G)}$ איננה ציקלית.
- נובע כי $|\ Z(G)\ |=3$ ולכן $|\ Inn(G)\ |=9$.

<u>סדרי איברים בחבורת התמורות</u>

עבור מחזור $\sigma\in S_n$ באורך k מתקיים $\sigma(\sigma)=k$ למשל $o(\begin{matrix}1&2&4&7\end{matrix})=4$.

<u>טענה:</u> (הוכחתם בהרצאה)

תהא G חבורה, $a,b\in G$ כך ש$ab=ba$ ו־$<a>\cap<b>=e_G$ אזי $o(ab)=lcm(o(a),o(b))$.

<u>מסקנה:</u> סדר מכפלת מחזורים זרים הוא הכפולה המשותפת המינימלית של סדרי המחזורים.

$$o\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=a}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}}_{=b}\right) = lcm(3,2) = 6$$

<u>תרגיל:</u> מצאו ת"ח מסדר 45 בS_{15}.

<u>פתרון:</u>

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$
$$o(a) = lcm(9,5) = 45$$

ולכן $H = \langle a \rangle$ היא ת"ח מסדר 45 של S_{15}. מ.ש.ל

<u>הערה:</u>

כל מחזור ב־S_nניתן לכתיבה כמכפלה של חילופים:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_{r-1} & a_r \end{pmatrix}$$ ולכן $S_n = \left\langle \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} : 1 \leq i,j \leq n \right\rangle$.

כלומר S_n נוצרת ע"י חילופים.

<u>תרגיל:</u> כמה מחזורים מסדר r יש בS_n?

<u>פתרון:</u>

ראשית יש לבחור r איברים מתוך n ויש $\binom{n}{r}$ דרכים לעשות זאת. שנית, את r האיברים שבחרנו ניתן לסדר ב$r!$דרכים שונות.

עם זאת המחזורים $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & ... & a_r & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_r & a_1 & ... & a_{r-1} \end{pmatrix}$

הם שווים ולכן יש לחלק ב r את מספר האפשרויות.

בסהכ נקבל שיש $\binom{n}{r} \cdot \frac{r!}{r} = \binom{n}{r} \cdot (r-1)!$ מחזורים שונים.

<u>תרגיל:</u>

מהם הסדרים האפשריים של איברים ב־S_4? בS_5?

<u>פתרון:</u>

<u>S_4: להלן הסדרים האפשריים</u>

סדר	איבר לדוגמה
1	id
2	(1,2)
3	(1,3,2)
4	(1,2,3,4)

לגבי S_5:

סדר	איבר לדוגמה
1	id
2	$(35)(14)$
3	(1345)
4	(12345)
5	$(12)(345)$
6	$(12)(345)$

מסקנה:

האם $D_{12} \cong S_4$? לא כי יש בD_{12}יש איבר מסדר 12 ($O(\sigma)=12$) ובS_4אין איבר שכזה.

טענה:

ראיתם בכיתה:

1. תמורות הן צמודות $\Leftrightarrow$יש להן אותו מבנה מחזורים.

2.תהי $\mu \in S_n$ אזי $\mu(\ i_1 \quad i_2 \quad \ldots \quad i_k\ )\mu^{-1} = (\ \mu(i_1) \quad \ldots \quad \mu(i_k)\ )$.

למשל: $(132)(12)(132)^{-1} = (31)$. התמורה (12) צמודה ל(31).

עוד דוגמה שמוכיחה את חשיבות הנוסחה (ניתן להעזר לגבי תתי חבורות נורמליות ולגבי חישוב מי המתחלף עם תמורה ואזי מי המרכז):

$(132)(1354)(132)^{-1} = (3254)$

- למשל התמורה $(132)(54)$אינה צמודה ל(13254).

דוגמה:

יהיו $\alpha=(245), \beta=(135), \sigma=(35)$. חשבו:

א.$\alpha\sigma\alpha^{-1}=?$

ב.$\alpha\beta\alpha^{-1}=?$

פתרונות:

א.(32)

ב.(132)

<u>תרגיל:</u> הוכיחו $S_n = \left\langle (12) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix} \right\rangle$

<u>פתרון:</u> הוכח בהרצאה.

<u>הגדרה:</u>סימן של תמורה יהי σ מחזור באורך k, אזי $sign(\sigma) = (-1)^{k+1}$. הסימן הוא פונקציה כפלית. $sign(\sigma\tau) = sign(\sigma)sign(\tau)$.

<u>למשל:</u>

- $sign(132) = 1$
- $sign((13)(56)) = 1$

הגדרת ת"ח של S_n: $A_n = \{\sigma \in S_n : sign(\sigma) = 1\}$ וראיתם:

א. $A_n \triangleleft S_n$.

ב. $\mid A_n \mid = \frac{n!}{2}$.

<u>למשל:</u> $A_3 = \{id, (123), (132)\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

<u>תרגיל:</u>

מהם סידרי האיברים בA_4? האם $A_4 \cong D_6$?

<u>פתרון:</u>

$A_4 = \{id, (--)(--), (---)\}$. הסדרים האפשריים: 1,2,3. $A_4 \ncong D_6$ כי ב־D_6 יש איבר יחידה מסדר 6.

תרגיל מאוד מאוד מאוד חשוב משבוע שעבר על אוטומורפימים

תרגיל:

הוכיחו את הטענה הבאה: לכל שתי חבורות G, Hקיים שיכון: $Aut(G) \times Aut(H) \hookrightarrow Aut(G \times H)$.

(*) השיכון הנ"ל הוא איזומורפיזם, אם מתקיים $1 = \left(\mid G \mid \quad \mid H \mid \right)$. ההוכחה קצת ארוכה ואתם מוזמנים לנסות בבית.

הוכחה:

נרצה למצוא מונומורפיזם $F : Aut(G) \times Aut(h) \to Aut(G \times H)$ כך ש$F(\varphi, \psi) =$ $\psi \times \varphi$כאשר $\varphi \times \psi(g, h) = (\varphi(g), \psi(h))$.

יש להראות:

1. $\varphi \times \psi \in Aut(G \times H)$ (מוגדרות של F)
2. F הומומורפיזם
3. Fחח"ע

נוכיח את 2:מה צ"ל?

$(\varphi_1 \circ \varphi_2) \times (\psi_1 \circ \psi_2) = F(\varphi_1 \circ \varphi_2, \psi_1 \circ \psi_2) = F(\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2)) = F(\varphi_1, \psi_1) \circ F(\varphi_2, \psi_2)$

$(\varphi_1 \times \psi_1) \circ (\varphi_2 \times \psi_2) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \times (\psi_1 \circ \psi_2) \Rightarrow$. נראה ששתי הפונקציות מתלכדות.

צ"ל:

$$(\varphi_1 \times \psi_1) \circ (\varphi_2 \times \psi_2)(g, h) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \times (\psi_1 \circ \psi_2)(g, h) \forall (g, h) \in G \times H$$

כלומר:

$$(\varphi_1 \times \psi_1) \circ (\varphi_2 \times \psi_2)(g, h) = (\psi_1 \times \psi_1)(\varphi_2(g), \psi_2(h)) = (\psi_1 \psi_2(g), \psi_1 \psi_2(h))$$

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2) \times (\psi_1 \circ \psi_2)(g, h) = (\psi_1 \psi_2(g), \psi_1 \psi_2(h))$$

וניתן להראות שהפונקציות אכן שוות.

מ.ש.ל □

נ.ב: בבית ניתן להוכיח חחע עפ"י החחע של φ, ψומכפלה של חחע ועל היא חחע ועל.