מבנים אלגבריים - תירגול 4

12 בנובמבר 2015

אבחנה:
יהיו $(G_1,\cdot),(G_2,*)$ חבורות אזי גם $G\times G_2$ חבורה ביחס לפעולה $(g_1,g_2)(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)=(g_1\cdot\tilde{g}_1,g_2*\tilde{g}_2)$. היחידה היא (e_{G_1},e_{G_2}) והופכי $(g_1,g_2)^{-1}=\left(g_1^{-1},g_2^{-1}\right)$.
למשל $S_2\times\mathbb{Z}$ היא חבורה עם הפעולה $(\sigma_1,n_1)(\sigma_2,n_2)=(\sigma_1\circ\sigma_2,n_1+n_2)$
הגדרה:
תהא G חבורה.

1. הסדר של $g\in G$ הוא $o(g)=\min\{n\in\mathbb{N}:\ g^n=e\}$ אם הקבוצה ריקה נסמן $o(g)=\infty$
2. הסדר של G הוא מספר האיברים שיש בה.
3. $g\in G$ יקרא יוצר אם $G=\{g^n:\ n\in\mathbb{Z}\}=\langle g\rangle$. במקרה זה G תקרא ציקלית.
4. הערה: $o(g)=|\langle g\rangle|$

תרגיל: נסתכל על $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$. מצא את סדר האיברים, מצא יוצרים (והסק כי היא ציקלית)
פתרון:

$o(g)$	g
1	$(0,0)$
3	$(0,1)$
3	$(0,2)$
2	$(1,0)$
6	$(1,1)$
6	$(1,2)$

ולכן היוצרים הם $(1,1),(1,2)$.
תרגיל: הוכח כי $G=\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ אינה ציקלית עבור $n>1$.
פתרון: נניח בשלילה כי החבורה ציקלית. אזי קיים $g=(m_1,m_2)\in G$ כך ש $\langle g\rangle=G$.
ב G יש n^2 איברים. הסדר של g הוא לכל היותר n כי $g^n=(n\cdot m_1,n\cdot m_2)=(0,0)=e$
ולכן $|\langle g\rangle|\leq n<n^2=|G|$ סתירה.
תרגיל: הוכח כי S_n אינה ציקלית עבור $n>2$
הוכחה: ראינו כי S_n אינה אבלית ולכן אינה ציקלית.
משפט: G צקילית גורר G אבלית.
תרגיל: בחבורה הסימטרית.

1. הסדר של מחזור הוא האורך שלו. כלומר הסדר של $(i_1,\ldots,i_m)$ הוא m

2. תהא $\sigma \in S_n$ ו $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ הפירוק למחזורים זרים. אזי $o(\sigma) = lcm \{o(\tau_i\}$

הוכחה:

1. מיידי

2. נסמן $d = lcm \{o(\tau_i\}$ אזי $\sigma^d = \tau_1^d \cdots \tau_m^d = id$. בנוסף, אם $\sigma^k = \tau_1^k \cdots \tau_m^k = id$ אזי לכל i $\tau_i^k = id$(כי המחזורים זרים) ולכן $o(\tau_i)|k$ ולכן $lcm \{o(\tau_i\} |k$ בפרט קטן שווה לו.