# תרגיל 2 – אלגברה מופשטת

**1.** יהי $M$ מונואיד. נגדיר את קבוצת ההפיכים $U(M)=\{a\in M : a \text{ הפיך}\}$. הוכיחו כי $U(M)$ היא חבורה ביחס לפעולה של $M$. חבורה זו נקראת חבורת ההפיכים.

**2.** ענו על הסעיפים הבאים.

2.1 מצאו את המחלק המשותף המקסימלי $(5614,1260)$.

2.2 מצאו $\alpha,\beta\in Z$ כך ש- $1525\alpha+927\beta=1$.

2.3 קבעו אם $[927]$ הפיך במונואיד $(Z_{1525},\cdot(\text{mod}1525))$. אם כן, מצאו את ההופכי שלו.

2.4 יהיו $m,n\in Z$ ו $d=(m,n)$ המחלק המשותף המקסימלי שלהם. יהי $k\in Z$ כך ש $k\,|\,m\wedge k\,|\,n$. הוכיחו כי $k\,|\,d$.

**3.** תהי $G$ חבורה ויהיו $a,b\in G$. הוכיחו את הטענות הבאות.

3.1 אם $o(a)=n$ ומתקיים $a^m=e$ אז $n\,|\,m$.

רמז: חלקו את $m$ ב $n$ חילוק עם שארית והראו כי השארית היא בהכרח אפס.

3.2 $o(ab)=o(ba)$.

3.3 נניח כי $o(a)=n$. אזי $a^m=a^k$ עבור $m,k\in Z$ אם ורק אם $m\equiv k(\text{mod}\,n)$.

**4.** ענו על הסעיפים הבאים.

4.1 תהי $G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix} : a,b,c\in Z_3\right\}$. הוכיחו כי $G$ חבורה ביחס לפעולת כפל מטריצות, מצאו את הסדר של $G$ ואת הסדר של כל איבר ב- $G$.

4.2 תהי $G$ חבורה. אם לכל $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^3=a^3b^3$ האם $G$ אבלית?

**5.** קבעו אילו מהחבורות הבאות הן ציקליות? עבור החבורות הציקליות מצאו יוצר, אחרת הסבירו מדוע החבורה אינה ציקלית.

5.1 $Z_{10}\times Z_{15}$

5.2 $Z_5\times Z_2$

5.3 $U_{20}$

**6.** ענו על הסעיפים הבאים.

6.1 תהיינה $H,G_1,G_2$ תת-חבורות של $G$. הוכיחו: אם $H\subseteq G_1\bigcup G_2$ אזי $H\subseteq G_1$ או $H\subseteq G_2$.

6.2 מצאו דוגמה לחבורה $G$ ולתת חבורות $H,G_1,G_2,G_3\le G$ כך ש- $H\subseteq G_1\bigcup G_2\bigcup G_3$ אבל $H$ <u>אינה</u> מוכלת בשום איחוד מהצורה $G_i\bigcup G_j$.

**7.** תהי $G$ חבורה. הוכיחו: אם לכל $x\in G$ מתקיים $x^2=1$ אזי $G$ היא חבורה אבלית.

**8.** תהי $G$ חבורה. נסמן $m_2(G)=\left|\left\{x\in G: x^2=1\right\}\right|$, כלומר $m_2(G)$ הוא מספר הפתרונות של המשוואה $x^2=1$ בחבורה $G$.

8.1 הראו שבכל חבורה סופית $G$ מתקיים $m_2(G)\equiv|G|\pmod 2$;

8.2 הראו שבכל חבורה עם מספר זוגי של איברים קיים איבר מסדר 2.

רמז לסעיף א': הגדירו על $G$ את יחס השקילות הבא:
$x\equiv y \Leftrightarrow (x=y \vee xy=1)$, ושימו לב שהאיברים שריבועם אינו 1 שייכים למחלקות שקילות בגודל 2.
הערה: הרמז מציע דרך פתרון אלגנטית. כדאי שלפני זה תנסו להגיע לאיזשהו פתרון אינטואיטיבי על סמך הרעיונות שכבר ראינו בכיתה.

בהצלחה! ☺