שאלון בחינה בקורס: פונקציות מרוכבות (88-231-01)
שם המרצה: פרופ' שחר נבו
סמסטר ב', מועד א'.
משך הבחינה: שלוש שעות
<u>חומר עזר: מחשבון כיס בלבד.</u>

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות, נמקו כל תשובה.

<u>שאלה 1</u>

א. מצא את כל ערכי החזקה $(1+i)^{(1-2i)}$ והראה שישנם ערכים קטנים כרצוננו (פרט ל-0) וערכים גדולים כרצוננו. 10

ב. חשב $\int\limits_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{1/z^2}}dz$. 10

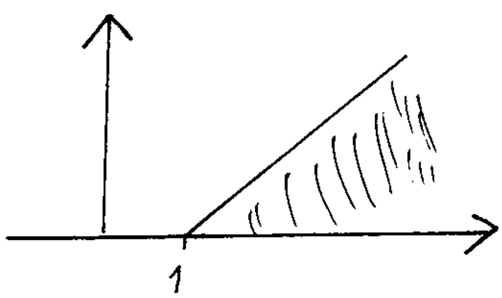
<u>שאלה 2</u>

א. נתון כי ל- $f(z)$ קוטב מסדר 2 ב- $z_0=0$. איזו סינגולריות יש ל- $\frac{f(z)}{z^2}+f(z^2)$ ב- $z_0=0$? 12

ב. נסח את עקרון הארגומנט. 8

<u>שאלה 3</u>

א. העתק הגיזרה $\{(x+iy):1<x,0<y<x-1\}$ קונפורמית על עיגול היחידה. 11



ב. תהיינה f,g פונקציות שלמות ונניח כי יש $L>0$ כך שלכל $z\in\mathbb{C}$, 9
$|f(z)+g(z)|<L$, $|f(z)-g(z)|<L$. הוכח כי f,g הן פונקציות קבועות.

<u>שאלה 4</u>

הוכח את משפט קזורטי-ויירשטרס האומר שאם z_0 סינגולריות עיקרית של f אז לכל $0<r$ קטן מספיק התמונה של $\Delta'(z_0,r)$ ע"י f צפופה ב- $\mathbb{C}$. 20

<u>שאלה 5</u>

חשב $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. 20

<u>שאלה 6</u>

א. הסבר מדוע $z_0=1$ היא קוטב של $f(z)=\frac{\sin^3(z-1)}{(Log\,z)^4\left[1-\cos(z-1)\right]^2}$ ומצא את סדר הקוטב. 10

ב. מצא מינימום ומקסימום של $|z(z+2)|$ בעיגול $\Delta\left(0,\frac{3}{2}\right)$. 10

בהצלחה!

<u>פתרון מועד א'</u> 88231 תשס"ו

1א. $(1+i)^{1-2i} = e^{(1-2i)\log(1+i)} = e^{(1-2i)[\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2\pi i k]} =$

$= e^{\ln\sqrt{2}+\pi/2+4\pi k+i(\pi/4+2\pi k-2\ln\sqrt{2})}, \quad k\in\mathbb{Z}$

עבור $k\to\infty$ נקבל ערכים $\to\infty$ ועבור $k\to-\infty$ נקבל ערכים $\to 0$
כמובן שהערך 0 לא מתקבל כי $e^z\neq 0$.

ב. $z^3\frac{1}{e^{1/z^2}} = z^3 e^{-1/z^2} = z^3\left[1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!z^4}-\frac{1}{3!z^6}+\cdots\right]$

המקדם של $\frac{1}{z}$ בטור הוא $1/2$ וזו השארית ב-0.
לכן ערכו של האינטגרל הוא $2\pi i\cdot\frac{1}{2}=\pi i$.

2א. יש $A\neq 0$ כך שבסביבת 0 $f(z)=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+$אנליטית
ולכן $f(z^2)=\frac{A}{z^4}+\frac{B}{z^2}+$אנליטית וגם

$$f(z)/z^2 = \frac{A}{z^4}+\frac{B}{z^3}+\left[\text{חזקות מסדר } \geq -2\right]$$

לכן $f(z^2)+\frac{f(z)}{z^2} = \frac{2A}{z^4}+\frac{B}{z^3}+\frac{B}{z^2}+\cdots$

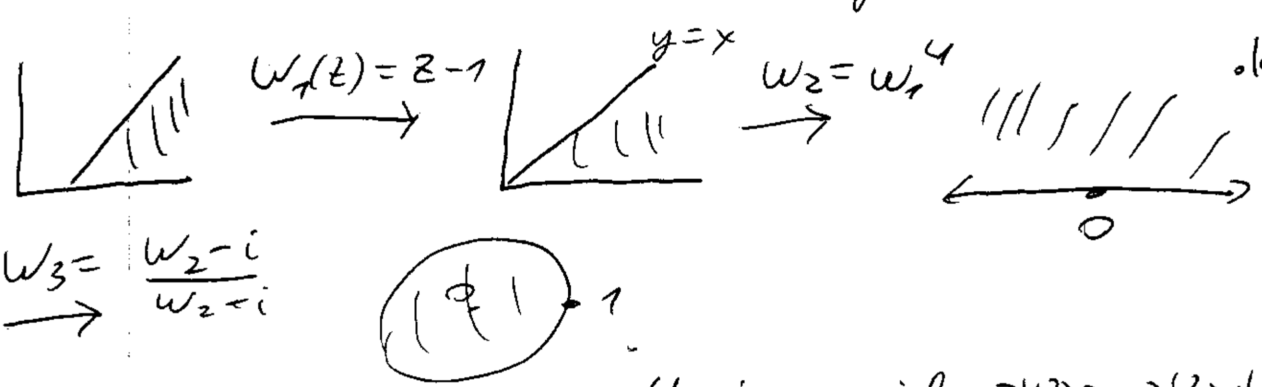
ומצאנו קוטב מסדר 4 $(2A\neq 0)$

ב. אם f מרומורפית בתחום D, γ מסילה סגורה פשוטה ב-D ופנימה ב-D, $f\neq 0,\infty$ על γ אז:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N-P$$

N - מס' אפסי f בתוך γ, כולל ריבוי.
P - מס' קטבי f בתוך γ, כולל ריבוי.

3א.



הפונקציה הדרושה f:

$$f(z)=w_3\circ w_2\circ w_1(z)=\frac{(z-1)^4-i}{(z-1)^4+i}$$

3 ג. לפי אי שוויון המשולש לכל z

$$|2f(z)|=|f(z)-g(z)+f(z)+g(z)| \le |f(z)-g(z)|+|f(z)+g(z)| \le$$
$$\le L+L=2L$$

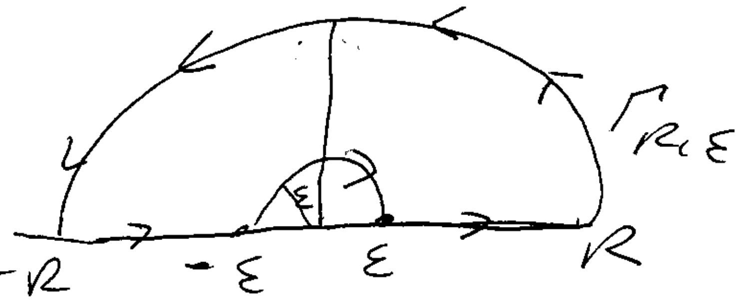
לכן $2f$ קבועה (ליוביל) ובדומה g קבועה.

4. שאלת הוכחה.

5. (נעשה בכיתה). האינטגרל I מתכנס כי $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ וב-∞ מתכנס לפי דיריכלה. $\frac{\sin x}{x}$ פ' זוגית לכן

$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ או $I=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{x}dx$ עבור x ממשי

$\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})$. נעיין במסלול $\Gamma_{\varepsilon,R}$ $(\varepsilon\to 0^+, R\to\infty)$



לפי משפט השארית:

$$\int_{\Gamma_{R\varepsilon}}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$$

כי אין ל- e^{iz}/z שארית בתוך $\Gamma_{R\varepsilon}$.

לפי למת ג'ורדן ערכו המוחלט של האינטגרל על חצי המעגל הגדול $\le \frac{\pi}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ אז האינטגרל על חצי המעגל הקטן ברדיוס ε נערך לפי הגדרה $z=\varepsilon e^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$

5.1

$$\int_{\curvearrowright_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\underset{\text{כיוון שלילי}}{-}\int_0^{\pi}\frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}}\,i\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta$$

$e^{z}\xrightarrow[z\to 0]{} 1$ לכן ערכו של האינטגרל שואף ל $-i\pi$. מכיוון שסכום של האינטגרלים על כל חלקי $\Gamma_{R\varepsilon}$ הוא 0 נקבל שהאינטגרל על הקטעים הישרים מ-$-R$ עד $-\varepsilon$ ומ-ε עד R שואף ל $i\pi$.

בסוף, כאשר $\varepsilon \to 0$ אז $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\sin x}{x}dx \to 0$ לכן

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$! $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

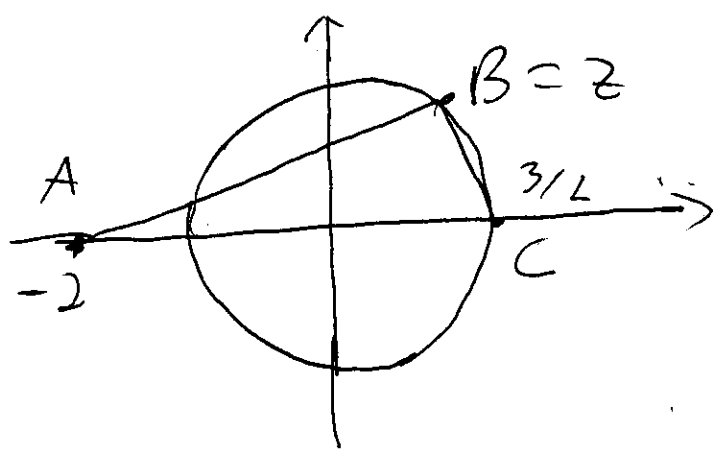
6. א. $\frac{\text{Log}(1+z)}{z} \xrightarrow[z\to 0]{} 1$, $\frac{\sin z}{z}$ וכן $1-\cos(z-1)=2\sin^2\frac{z-1}{2}$

$$f(z)=\left(\frac{\sin^3(z-1)}{(z-1)^3}\frac{(z-1)^4}{(\text{Log}(1+z-1))^4}\cdot\frac{((z-1)/2)^4}{\left[2\sin^2\frac{z-1}{2}\right]^2}\right)\cdot\frac{(z-1)^3}{(z-1)^4}\cdot\frac{16}{(z-1)^4}$$ 5:1

לחלק המוקף סינג' סליקה ב $z=1$ והגבול הוא $\frac{1}{4}\neq 0$.

השאר הוא $16/(z-1)^5$ כלומר מדובר בקוטב מסדר 5.

ב. המינימום הוא 0 ומתקבל ב- $z=0$. לפי עקרון ה-max מושג על השפה ושם ערכה של הפונקציה הוא $\frac{3}{2}|z+2|$. $|z+2|$ הוא המרחק של z מ- -2. הנקודה הרחוקה ביותר על $\{|z|=\frac{3}{2}\}$ מ- -2 היא $z_0=\frac{3}{2}$



שכן בכל משולש ABC AC היא הצלע הגדולה ביותר (כי הזווית $B>90^\circ$, מדוע?) לכן המקסימום הוא $\frac{3}{2}\left|\frac{3}{2}+2\right|=\frac{21}{4}$.