תרגיל 8

1. תהא $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ עם דרגה = 5. נתון כי $rank(A-3I)=5$. עוד נתון כי ל A קיים ע"ע ששוה ל ־ 5 . הוכח כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצא את האלכסונית ש A דומה לה.
פתרון : ידוע כי $rank(A)+\dim N(A)=9$ ולכן $\dim N(A)=4$. כלומר הר"ג של ע"ע = 0 הוא 4 ולכן הר"א שלו לפחות 4. משיקולים דומים הר"ג של ע"ע = 3 הוא 4 ולכן הר"א שלו לפחות 4. נתון שיש ע"ע =5 ולכן הר"א שלו לפחות 1.

כיוון שסכום ר"א של הע"ע הוא 9 אזי נקבל כי

ע"ע =0 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 4

ע"ע =3 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 4

ע"ע =5 הוא עם בדיוק ר"א (ששוה לר"ג) 1

לפי משפט A לכסינה והמטריצה האלכסונית הדומה לה היא

$$D=\begin{pmatrix} 0I_4 & & \\ & 3I_3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

כאשר I_4 היא מטריצת היחידה מגודל 4×4.

2. תזכורת: סדרת פיבונאצי $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ היא הסדרה המוגדרת בצורה רקורסיבית כך:

$$F_0=0, F_1=1,\ \ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

מצא נוסחה מפורשת ל F_n ע"י שימוש ביחס

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

הדרכה:

(א) הוכיחו כי מתקיים לכל nטבעי כי

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

(ב) ע"י לכסון A חשבו מפורשות את A^n (אם $A=PDP^{-1}$ אזי ... $A^n=$)

(ג) הסיקו את F_n

פתרון : נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

אזי

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}F_n\\ F_{n-1}\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}F_{n-1}\\ F_{n-2}\end{pmatrix}=A^3\begin{pmatrix}F_{n-2}\\ F_{n-3}\end{pmatrix}\ldots=A^kA^2\begin{pmatrix}F_{n-(k-1)}\\ F_{n-k}\end{pmatrix}$$

נבחר $k=n$ ונקבל

$$\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}F_1\\ F_0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

נחשב את A^n בעזרת ליכסון:

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)\,\lambda-1=\lambda^2-\lambda-1$$

ומכאן ש

$$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

נמצא ו"ע. כיוון שחייב להיות ו"ע אזי אפשר לרשום (ניתן גם לבדוק, אם רוצים:))

$$A-\lambda_1I=\begin{pmatrix}1-\lambda_1 & 1\\ 1 & -\lambda_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\lambda_1\\ 1-\lambda_1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\lambda_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$v_1=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ 1\end{pmatrix}$$

הוא וקטור עצמי של λ_1.באופן דומה

$$A-\lambda_2I=\begin{pmatrix}1-\lambda_2 & 1\\ 1 & -\lambda_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\ 1-\lambda_2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$v_2=\begin{pmatrix}\lambda_2\\ 1\end{pmatrix}$$

הוא וקטור עצמי של λ_2. נגדיר

$$P=(v_1,v_2)\Rightarrow P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\ -1 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

ואז

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

ולכן

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

ולסיכום

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ -\lambda_2^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} * \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן התשובה הסופית היא

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n)$$

3. תהא מטריצה $A \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ עם מקדמים <u>ממשיים</u>. נניח כי

(א) הפולינום $(x+i)\,(x+1)^3\,(x-2)^2$ מחלק את הפולונים האופיני $f_A(x)$.

(ב) הפולינום $(x+1)^2$ מחלק את הפולינום המימנאלי $m_A(x)$.

מצאו את צורת ז'ורדן האפשריות ל A.

פתרון : כיוון ש i הוא שורש של $f_A(x)$ אז גם גם הצמוד שלו $-i$ הוא שורש כי A ממשית. לכן

$$f_A(x) = (x-i)\,(x+i)\,(x+1)^3\,(x-2)^2$$

הפולינום המינמאלי הוא מהצורה

$$m_A(x) = (x-i)\,(x+i)\,(x+1)^k\,(x-2)^j$$

כאשר $k \in \{2,3\}$ לפי הנתון ו $j \in \{1,2\}$. צורת ג'רדן של A אלכסונית בלוקים כאשר כל בלוק מתאים לע"ע (אצלו הע"ע הם $i, -i, -1, 2$)

את הבלוק המתאים לע"ע 2 נסמן $A_{\lambda=2}$. בצורה דומה את שאר הע"ע.

הצורות האפשריות: עבור $i, -i$ מתחייב כי

$$A_{\lambda=i}=(i)\,,A_{\lambda=-i}=(-i)$$

עבור $-1,2$ קיימות 2 אפשרויות לכל ע"ע

$$A_{\lambda=-1}=\begin{pmatrix}-1&1&\\&-1&1\\&&-1\end{pmatrix}\text{ or }\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&1\\&&-1\end{pmatrix}$$

$$A_{\lambda=2}=\begin{pmatrix}2&\\&2\end{pmatrix}\text{ or }\begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix}$$

4. תהא

$$A=\begin{pmatrix}-3&1&-1&&&&&\\-7&5&-1&&0&&&0\\-6&6&-2&&&&&\\&&&4&0&1&&\\&0&&0&1&0&&0\\&&&0&0&4&&\\&&&&&&-1&-1\\&0&&&0&&1&-3\end{pmatrix}$$

מצא צורת זורדן של A

פתרון : כיוון ש A היא אלכסונית בלוקים, מספיק למצוא צורת זורדן עבור כל בלוק בנפרד. הבלוקים הם

$$A_1=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}4&0&1\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-3\end{pmatrix}$$

עבור A_1:

$$f_{A_1}(x)=\left|\begin{pmatrix}x+3&-1&1\\7&x-5&1\\6&-6&x+2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}x+2&-x-2&x+2\\7&x-5&1\\6&-6&x+2\end{pmatrix}\right|=$$

$$=(x+2)\left|\begin{pmatrix}1&-1&1\\7&x-5&1\\6&-6&x+2\end{pmatrix}\right|=...=(x+2)^2(x-4)$$

עבור A_2:

$$f_{A_2}(x) \quad = \quad \left| \begin{pmatrix} x-4 & & -1 \\ & x-1 & \\ & & x-4 \end{pmatrix} \right| = (x-4)^2(x-1)$$

עבור A_3:

$$f_{A_2}(x) \quad = \quad \left| \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ -1 & x+3 \end{pmatrix} \right| = (x+1)(x+3)+1 = (x+2)^2$$

הפולניומים המימאלים שווים לפ"א.

ולכן A_1 דומה ל

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \\ & -2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

A_2 דומה ל

$$D_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

A_3 דומה ל

$$D_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ & -2 \end{pmatrix}$$

ולכן A דומה ל

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ & -2 & & & & & & \\ & & 4 & & & & & \\ & & & 4 & 1 & & & \\ & & & & 4 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -2 & 1 \\ & & & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

ובסידור הבלוקים

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & & & \\ & 4 & & & & & & \\ & & 4 & & & & & \\ & & & -2 & 1 & & & \\ & & & & -2 & & & \\ & & & & & -2 & 1 & \\ & & & & & & -2 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

בהצלחה!