טורי פורייה - חישוב מקדמים וחישוב טורי מספרים

הגדרה 1. בהינתן פונקציה $f:[-\pi,\pi]$ טור פורייה שלה מוגדר על ידי

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

כאשר:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$$

תכונות:

1. אם f היא פונקציה זוגית, ז"א $f(x)=f(-x)$ המקדמים b_n מתאפסים.
2. אם f היא פונקציה אי-זוגית, ז"א $f(-x)=-f(x)$ המקדמים a_n (כולל a_0 מתאפסים).
3. הטור $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi+b_n\sin n\pi$ מתכנס ב $\pm\pi$ ל $\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$.
4. אם f רציפה ב x, הטור $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$ מתכנס ל $f(x)$.
5. אם f אינה רציפה ב x, ויש "קפיצה" הטור מתכנס ל $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ כאשר $f(x^+)$ הוא הגבול הימני ו $f(x^-)$ הוא הגבול השמאלי של f ב x.

דוגמה 2. נחשב את הטור של $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$.

הפונקציה שלנו היא אי-זוגית ולכן בפיתוח יופיעו רק סינוסים. נעבור לחשב את המקדמים

b_n.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\sin nx\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\left((-1)^n-1\right) \\ &= \begin{cases} 0 & n=2m \\ \frac{4}{(2m+1)\pi} & n=2m+1 \end{cases} \end{aligned}$$

(שימו לב - $n=2m$ אומר ש n זוגי, ו $n=2m+1$ אומר ש n אי-זוגי.)

הרבה פעמים אפשר לעצור בשלב הזה, ורק לציין מה הם מקדמים, אבל נרשום את הטור בכל זאת:

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(2m+1)\pi}\sin(2m+1).$$

חישוב טורי מספירים בעזרת פורייה.

אם טור פורייה של f הוא ידוע, ז"א

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

ניתן להשתמש בכללים הבאים על מנת לחשב את הערך שלו.

1. הצבת $x=0$ בטור פורייה נותנת את הטור מספרים את $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.
2. הצבת $x=\pm\pi$ בטור פורייה נותנת את הטור מפסרים $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.
3. הצבת $\frac{\pi}{2}$ בטור פורייה נותנת את הטור המספרים $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_{2n}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m b_{2m+1}$. (כל המקדמים האי-זוגיים של a_n מתאפסים וכל המקדמים הזוגיים של b_n מתאפסים).

דוגמה 3. בעזרת הטור של f מהדוגמה הקודמת נחשב את ערך של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.
נציב $\frac{\pi}{2}$ בטור שמצאנו ונקבל:(השוויון הימני מתקיים כי f רציפה ב $\frac{\pi}{2}$ זאת אומרת, אין קפיצות)

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2m+1)}(-1)^m.$$

נכפיל את שני הצדדדים ב $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}$$

שהוא הסכום של הטור המבוקש.