תרגיל בית 8 – מופשטת 1

<u>שאלה 1</u>

תהי G חבורה, ו- $A,B\le G$ שתי תת חבורות שלה. הוכיחו שכל שתיים מבין התכונות הבאות גוררות את השלישית:

א. $A\bigcap B=\{1\}$;

ב. $AB=G$;

ג. $|A|\cdot|B|=|G|$.

<u>שאלה 2</u>

הוכיחו:

א. אוטומורפיזם נקבע על-ידי התמונות של קבוצת יוצרים (רמז: ראיתם שזה נכון עבור הומומורפיזם);

ב. אוטומורפיזם מעביר מחלקת צמידות למחלקת צמידות (רמז: הראו שאם x,y צמודים, אזי גם התמונות שלהם תחת אוטומורפיזם צמודות);

ג. אוטומורפיזם שומר על התחלפות ועל אי-התחלפות (רמז: הוא הפיך).

<u>שאלה 3</u>

<u>תזכורת</u>: עבור $H\le G$ מגדירים את ה**מנרמל** של H ב- G להיות $N_G(H):=\{g\in G: gH=Hg\}$. כאשר ההקשר ברור, נרשום פשוט $N(H)$.

הוכיחו:

א. $N(H)\le G$ ו- $H\lhd G \Leftrightarrow N(H)=G$;

ב. $H\lhd N(H)$;

ג. אם $H\lhd K\le G$ אזי $K\le N(H)$.

<u>שאלה 4</u>

נתבונן ב- S_6 ובקבוצה הבאה: $H=\{\sigma\in S_6:\sigma(2)=2,\sigma(4)=4,\sigma(6)=6\}$.

א. הוכיחו ש- H היא תת-חבורה ושהיא איזומורפית ל- S_3. האם היא תת חבורה נורמלית?

ב. הוכיחו שב- $N(H)$ יש שתי תת-חבורות K,L – כך ששתיהן איזומורפיות ל- S_3 ו- $L\cap K=\{id\}$.

שאלה 5

א. מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_8$ ושל $\mathbb{Z}_{25}$;

ב. מצאו את מספר האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_{25}\times\mathbb{Z}_8$;

ג. זהו את החבורה $Aut\left({GL_n(\mathbb{Z}_7)}/{SL_n(\mathbb{Z}_7)} \right)$ (לכל n>0).

שאלה 6

הוכיחו $Aut(S_3)\cong S_3$.

שאלה 7

תהי G חבורה סופית ונניח $|G|>2$. הוכיחו כי $|Aut(G)|\geq 2$.

בהצלחה!