אינפי 1 תרגיל 12

24 בינואר 2015

1. הוכיחו לפי ההגדרה :

א. $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ עבור $a > 1$.

פתרון: נציב N אינסופי שלם. לכל r מספר ממשי, $\log_a r$ הוא גם מספר ממשי, ולכן: $N > \log_a r$, נפעיל a בחזקת על כל האי־שוויון, לקבל: $a^N > r$ לכל r ממשי, ולכן a^N הוא אינסופי חיובי, לכל N.

שימו לב שבגלל ש $a > 1$, כשעשינו "a בחזקת" על שני אגפי האי־שוויון, הסימן של האי־ שוויון לא השתנה.

ב. $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ עבור $0 < a < 1$

פתרון: נציב N אינסופי שלם. לכל r מספר ממשי, $\log_a r$ הוא גם מספר ממשי, ולכן: $N > \log_a r$, נפעיל a בחזקת על כל האי־שוויון, לקבל: $a^N < r$ לכל r ממשי, ולכן a^N הוא חיבי שגדול מכל מספר ממשי, כלומר־ אינפיניטיסימלי. לכן, $st(a^N) = 0$ לכל N.

שימו לב שבגלל ש $a < 1$, כשעשינו "a בחזקת" על שני אגפי האי־שוויון, הסימן של האי־ שוויון התחלף.

2. הוכח לפי הגדרת $\epsilon - N$ של הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

פתרון: יהי $\epsilon > 0$ נתון. אנחנו רוצים שיתקיים: $|\frac{n^2}{n^2+1} - 1| < \epsilon$. ובכן:

$$|\frac{n^2}{n^2+1} - 1| = |\frac{n^2 - n^2 - 1}{n^2+1}| = |\frac{-1}{n^2+1}| = \frac{1}{n^2+1}.$$

בשביל ש: $\frac{1}{n^2+1} < \epsilon$ צריך: $n^2 + 1 > \frac{1}{\epsilon}$, כלומר: $n^2 > \frac{1}{\epsilon} - 1$. אם $\epsilon < 1$נקבל מספר שלילי, ואז האי שוויון נכון תמיד. אחרת, זה גורר ש: $n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$. אז נבחר

$n_0 = [\sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}]$, ונקבל, שלכל $n > n_0$, $n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$ ולכן $\frac{1}{n^2+1} < \epsilon$. כלומר, לכל ϵמצאנו n_0 מתאים. מש"ל.

3. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

א. $< \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} >$

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{(n+1)^n}{n \cdot n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot (\frac{n+1}{n})^n = \frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{1}{n})^n$$

לכן: $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 0 \cdot e = 0$

ב. $< \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} >$

פתרון: $\frac{(\frac{2}{3})^n + 1}{(\frac{2}{3})^n - 1} = \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$. כעת נציב מספר אינסופי שלם N, ונשים לב שידוע ש $(\frac{2}{3})^N$ הוא אינפיניטיסימילי. לכן: $st\frac{(\frac{2}{3})^N + 1}{(\frac{2}{3})^N - 1} = -1$

מסקנה: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} = -1$

ג. $< \frac{n!}{n^3} >$

פתרון: $\frac{n!}{2^n} \cdot \frac{2^n}{n^3} = \frac{n!}{n^3}$. לכן: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n} \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^3} = \infty \cdot \infty = \infty$. (אילו גבולות ידועים)

ד. $< \frac{n}{(\ln n)^2} >$

פתרון: $(\frac{\sqrt{n}}{\ln n})^2 = \frac{n}{(\ln n)2}$. ואם נציב מספר אינסופי אנחנו יודעים שנקבל מספר אינסופי בריבוע (כי ידוע ש $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \infty$) ולכן $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^2} = \infty$

ה. $< (-1)^n n >$

פתרון: נציב N אינסופי שלם זוגי. $(-1)^N N = 1 \cdot N = N$, אינסופי חיובי.

נציב N אינסופי שלם אי זוגי. $(-1)^N N = -1 \cdot N = -N$ אינסופי שלילי. לכן אין גבול, הסדרה מתבדרת.

ו. $< (\frac{2n^3 - 1}{2n^3 + 3})^{3n^3+4} >$

פתרון: $(\frac{2n^3-1}{2n^3+3})^{3n^3+4} = (\frac{2n^3+3}{2n^3-1})^{-3n^3-4} = (\frac{2n^3-1+4}{2n^3-1})^{-3n^3-4} = (1+\frac{4}{2n^3-1})^{-3n^3-4} = (1+\frac{4}{2n^3-1})^{2n^3-1\frac{(-3n^3-1)}{(2n^3-1)}} = ((1+\frac{4}{2n^3-1})^{2n^3-1})^{\frac{(-3n^3-1)}{(2n^3-1)}}$

נשים לב ש $2n^3-1 \to \infty$ ולכן לפי משפט שהוכחנו בכיתה $(1+\frac{4}{2n^3-1})^{2n^3-1} \to e^{-6}$

בנוסף, $\frac{(-3n^3-1)}{(2n^3-1)} \to -\frac{3}{2}$ ולכן: $\lim_{n\to\infty}(\frac{2n^3-1}{2n^3+3})^{3n^3+4} = (e^4)^{-3} = e^{-12}$.

ז. $< 2^n - n^2 >$

פתרון: $\lim_{n\to\infty} 2^n - n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-n^2}{n^2}\cdot n^2 = \lim_{n\to\infty}(\frac{2^n}{n^2}-1)\cdot n^2 = (\frac{2^n}{n^2}-1)\cdot \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty\cdot\infty = \infty$

הערה: $\frac{2^n}{n^2}$ הוא גבול ידוע.

ח. $< \sqrt[n]{n} >$

פתרון: $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\ln n \frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. ידוע ש $\frac{\ln n}{n} \to 0$ לכן $\lim \sqrt[n]{n} = \lim e^{\frac{\ln n}{n}} = \lim e^0 = 1$

ט. $< \frac{n!+2}{(n+1)!+1} >$

פתרון: $\frac{n!+2}{(n+1)!+1} = \frac{1+\frac{2}{n!}}{n+1+\frac{1}{n!}}$ אם נציב N אינסופי שלם נקבל מס' סופי חלקי אינסופי,כלומר, אינפיניטיסימלי. לכן $\lim \frac{n!+2}{(n+1)!+1} = 0$

י. $< \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} >$

נציב מספר אינסופי שלם $\frac{(-1)^N}{\sqrt{N}}$ נקבל מס' סופי חלקי אינסופי, כלומר, אינפיניטיסימלי.

לכן $\lim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$

4. א. הוכיחו/הפריכו: אם $< a_n >$ סדרה מתכנסת, אז $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$

הוכחה: $< a_n >$ מתכנסת, לכן לכל מס' אינסופי שלם שנציב, N, $st(a_N)$ סופי וקבוע, בפרט, אם נציב $N+1, N$, $st(a_N) = st(a_{N+1})$ לכן $st(a_{N+1}-a_N) = 0$, אז $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ אז $< a_n >$ סדרה מתכנסת.

הפרכה: נסתכל על הסדרה $\sqrt{n}$. זה ברור שהיא מתבדרת לאינסוף, אבל: $a_{n+1}-a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$

5. הוכיחו/הפריכו: אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$.

הפרכה: נסתכל על הסדרה $\frac{1}{n}$. ברור שהיא שואפת לאינסוף, אבל: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=$

$$\frac{n}{n+1}\to 1$$

6. הוכיחו/הפריכו: $< a_n >$ סדרת קושי אמ"ם לכל פו' רציפה במ"ש f, $< f(a_n) >$ היא סדרת קושי.

הוכחה: $\Longleftarrow$:אם $< a_n >$ סדרת קושי, זה אומר שלכל N,M אינסופיים שלמים שנציב $a_N\approx a_M$, ומכיוון שf רציפה במ"ש נקבל ש $f(a_N)\approx f(a_M)$, לכן $< f(a_n) >$ סדרת קושי.

$\Longrightarrow$: אם $< f(a_n) >$ קושי לכל f רציפה במ"ש, זה נכון בפרט לפו' $f(x)=x$, שידוע שהיא פו' רציפה במ"ש. לכן $< f(a_n) >=< a_n >$סדרת קושי.