אינפי 1 תרגיל 6 פתרון

10 בדצמבר 2014

.1.א

$$\begin{aligned}
\frac{d(xy^2-3x^2y+x)}{dx} = \frac{d(1)}{dx} \quad &\Rightarrow \quad \frac{d(xy^2)}{dx} - \frac{d(3x^2y)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{dx}{dx}y^2 + x\frac{d(y^2)}{dx} - \frac{3d(x^2)}{dx}y - \frac{3dy}{dx}x^2 + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{dx}{dx}y^2 + x\frac{d(y^2)}{dx} - \frac{3d(x^2)}{dx}y - \frac{3dy}{dx}x^2 + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} - 6xy - 3\frac{dy}{dx}x^2 + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(2xy-3x^2) = -y^2+6xy-1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y^2+6xy-1}{2xy-3x^2}
\end{aligned}$$

$$\Longleftarrow 5x^4 = \Longleftarrow 5x^4 = 2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} + \frac{d(1)}{dx} \Longleftarrow \frac{d(x^5)}{dx} = \frac{d(y^2-y-1)}{dx}$$.ב

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4}{2y-1} \Longleftarrow 5x^4 = (2y-1)\frac{dy}{dx}2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}$$

$$\Longleftarrow 2y\frac{dy}{dx} = \Longleftarrow 2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x+3y}\frac{d(2x+3y)}{dx} \Longleftarrow \frac{dy^2}{dx} = \frac{d(ln(2x+3y))}{dx}$$.ג

$$\Longleftarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{3}{2x+3y} - 2y\right) = \Longleftarrow 2y\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x+3y} + \frac{3}{2x+3y}\frac{dy}{dx}\frac{1}{2x+3y}\left(2+3\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2}{2x+3y}}{\frac{3}{2x+3y} - 2y}\frac{2}{2x+3y}$$

ד. $\frac{d(\sqrt{xy+1})}{dx} = \frac{dy}{dx} \Longleftarrow \frac{d(xy+1)}{dx}\frac{1}{2\sqrt{xy+1}} = \frac{dy}{dx} \Longleftarrow + \frac{dy}{dx}\frac{x}{2\sqrt{xy+1}} = \frac{dy}{dx} \Longleftarrow$
$(y+\frac{dy}{dx}x)\frac{1}{2\sqrt{xy+1}} = \frac{dy}{dx} \Longleftarrow \frac{y}{2\sqrt{xy+1}}\frac{y}{2\sqrt{xy+1}} = (\frac{x}{2\sqrt{xy+1}}-1)\frac{dy}{dx} \Longleftarrow= \frac{dy}{dx}$

$$\frac{\frac{y}{2\sqrt{xy+1}}}{1-\frac{x}{2\sqrt{xy+1}}}$$

.2 $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x+y^3)}{dx} \Longleftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}3y^2+1 \Longleftarrow= (1-3y^2)\frac{dy}{dx} \Longleftarrow \frac{-1}{3y^2-1} = \frac{dy}{dx}$

-1 נציב $y=2$ ונקבל $\frac{-1}{3\cdot 4-1} = \frac{dy}{dx} \Longleftarrow \frac{1}{11}- = \frac{dy}{dx}$

.3א. נקח x כך ש $st(x)=2$.

אנחנו רוצים לחשב את $st\frac{x}{x^2-2}$ אולם נקבל שהמונה סופי והמכנה אינפיניטיסימלי ולכן הביטוי כולו אינסופי ואין לו ערך סטנדרטי. כלומר, הגבול לא קיים.

ב. נקח x כך ש $st(x)=8$.

$$st\frac{\sqrt{8}-\sqrt{x}}{x-8} = st\frac{8-x}{(x-8)(\sqrt{8}+\sqrt{x})} = st\frac{-1}{\sqrt{8}+\sqrt{x}} = \frac{-1}{st(\sqrt{8}+\sqrt{x})} = \frac{-1}{2\sqrt{8}}$$

ג. נקח x כך ש $st(x)=1$.

$$st(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}) = \sqrt{st(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})} = \sqrt{1+st(\sqrt{x+\sqrt{x}})} = \sqrt{1+\sqrt{st(x)+st\sqrt{x}}} =$$
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{st(x)}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$$

ד. נקח x כך ש $st(x)=0$.

$$st\frac{3+4x^{-1}-5x^{-2}}{6-x^{-1}+3x^{-2}} = st\frac{(3+4x^{-1}-5x^{-2})x^2}{(6-x^{-1}+3x^{-2})x^2} = st\frac{3x^2+4x-5}{6x^2-x+3} = \frac{st(3x^2+4x-5)}{st(6x^2-x+3)} = \frac{-5}{3}$$

ה. נקח x כך ש $x>0, st(x)=0$.

$$st(x\sqrt{1+x^{-2}}) = st\sqrt{x^2}\sqrt{1+x^{-2}} = st\sqrt{x^2+1} = \sqrt{st(x^2+1)} = \sqrt{st(x^2)+1} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

ו. נקח x כך ש $x<c, st(x)=c$.

$$st\sqrt{c-x} = \sqrt{st(c-x)} = \sqrt{c-st(x)} = \sqrt{c-c} = \sqrt{0} = 0$$

שימו לב ש $\sqrt{c-x}$ מוגדר כי $x<c$.

ז. נקח Δx כך ש $\Delta x<0, st(\Delta x)=0$.

$$st\frac{|(1+\Delta x)^3-(1+\Delta x)}{\Delta x}=st\frac{|1+3\Delta x+3\Delta^2+\Delta x^3-1-\Delta x|}{\Delta x}=st\frac{|\Delta x(2+3\Delta x+\Delta x^2)|}{\Delta x}=$$

$st\frac{|\Delta x|}{\Delta x}st|2+3\Delta x+\Delta x^2|$ מכיוון ש Δx שלילי זה יוצא 2-

ח. התהליך הוא בדיוק אותו דבר, אבל מכיוון שהפעם Δx חיובי מקבלים 2.

4. יהי n מספר שלם, נחשב את הגבולות החד צדדיים:

$\lim_{x\to n^+} f(x)=st_{\Delta x>0}f(n+\Delta x)=st(n)=n$ מכיוון שעבור $\Delta x>0$, $n<n+\Delta x<n+1$.

$\lim_{x\to n^-} f(x)=st_{\Delta x<0}f(n+\Delta x)=st(n-1)=n-1$ מכיוון שעבור $\Delta x<0$, $n-1<n+\Delta x<n$.

כעת נחשב את הגבולות החד צדדיים ב$\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. יהי $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. $m<r<m+1$ עבור איזשהו $m\in\mathbb{N}$. לפי משפט שהוכחנו בעבר, לכל Δxאינפיניטיסימלי (לא משנה אם חיובי או שלילי) מתקיים $m<r+\Delta x<m+1$ לכן:

$$\lim_{x\to r^+} f(x)=\lim_{x\to r^-} f(x)=st(f(r+\Delta x))=st(m)=m$$

5. נקח $f(x)=\frac{1}{x-1}$ נחשב את הגבול ב $x_0=1$. ובכן, אם $st(x)=1$ אז $\frac{1}{x-1}$ הוא ביטוי אינסופי ולכן אין לו חלק סטנדרטי, לכן הגבול לא מוגדר.

6. א. נניח $\lim_{x\to x_0} f(x0-L$ כלומר, לכל Δxאינפיניטיסימלי $st(f(x_0+\Delta x)=L$. כעת נחשב את הגבול של $|f(x)|$בx_0.

$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=st|f(x_0+\Delta x)|=|st(f(x_0+\Delta x)|=|L|\backslash$ מש"ל

ב. הטענה ההפוכה לא נכונה. נקח למשל את הפונקציה: $f(x)=\frac{|x|}{x}$ אנחנו כבר יודעים שאין לה גבול ב0. אולם $|f(x)|=|\frac{|x|}{x}|=\frac{|x|}{|x|}=1$ זאת פונקציה קבועה ולכן יש לה גבול בכל נקודה ובפרט בנקודה 0