$$T: V \to W$$

$$[T]_C^B: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$$

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$[b_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$[T]_C^B \cdot e_i = [T]_C^B [b_i]_B = [Tb_i]_C = C_i([T]_C^B)$$

$$[T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$$

דוגמא:

סדרת פיבונאצ'י היא הסדרה המוגדרת ע"י:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 1$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$0,1,1,2,3,5,8,13, \dots$$

נגדיר פונקציה

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (y, x + y)$$

זו העתקה לינארית, קל להוכיח.

נשים לב

$$T(a_n, a_{n+1}) = (a_{n+1}, a_{n+2})$$

עברנו את ההקדמה, כעת לשאלה:

$$T(x,y)=(y,x+y)$$

נביט בבסיס

$$B=\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},-1\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},-1\right)\right\}$$

מצאו את

$$[T]_B=[T]_B^B=?$$

1. נפעיל את ההעתקה על איברי הבסיס לתחום B.

$$T\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},-1\right)=\left(-1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right)=\left(-1,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$T\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},-1\right)=\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1\right)=\left(-1,\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

2. נמצא את הקואורדינטות של התמונות של הבסיס לתחום לפי הבסיס לטווח.

נמצא את הקואורדינטות לפי הבסיס לטווח B של וקטור כללי במרחב, ואז נציב את התמונות הנתונות.

$$[(x,y)]_B=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

הקואורדינטות הללו הן וקטור הפתרון למערכת

$$\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & x\\ -1 & -1 & y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1 & y\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & x\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1 & y\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2} & x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}y\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -y\\ 0 & -\sqrt{5} & x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -y\\ 0 & 1 & -\frac{x}{\sqrt{5}}-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}y\\ 0 & 1 & -\frac{x}{\sqrt{5}}-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}y\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[(x,y)]_B=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}y\\ -\frac{x}{\sqrt{5}}-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}y\end{pmatrix}$$

$$\left[T\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},-1\right)\right]_B=\left[\left(-1,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]_B=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}}+\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

באופן דומה

$$\left[T\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},-1\right)\right]_B=\left[\left(-1,\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]_B=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$$

3. נשים את הקואורדינטות של התמונות של איברי הבסיס לתחום לפי הבסיס לטווח

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

הערה לסיום – זו מטריצה אלכסונית וקל מאד להעלות אותה בחזקה גבוהה וכך למצוא איברים בסדרת פיבונאצי באופן מיידי.

דוגמא:

$$I: V \to V$$

$$Iv = v$$

האם

$$[I]_C^B = I$$

?

הסבר נסיבתי

$$[I]_C^B [v]_B = [v]_C$$

דוגמא:

יהיו שני בסיסים ל$\mathbb{R}_1[x]$

$$B = \{1+x, x\}$$

$$C = \{2, -1-x\}$$

נחשב את

$$[I]_C^B$$

1. ~~נפעיל את העתקת הזהות על איברי הבסיס של התחום *B*~~
2. נמצא קואורדינטות לפי הבסיס לטווח *C*.

נמצא קואורדינטות לוקטור כללי במרחב הטווח:

$$[a+bx]_C = ?$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & -1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 1 & -b \end{pmatrix} \to$$

$$[a+bx]_C = \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} \\ -b \end{pmatrix}$$

$$[1+x]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[x]_C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. נשים בעמודות

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

דוגמא לדוגמא

$$[1-x]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$[1-x]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[I]_C^B [1-x]_B = [1-x]_C$$

אכן

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת נחשב את ההופכית של מטריצת המעבר

$$([I]_C^B)^{-1} = [I]_B^C$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$[I]_B^C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[I]_B^C [1-x]_C = [1-x]_B$$

ואכן

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

דוגמא:

$$T: \mathbb{R}^3 \to R_2[x]$$

$$T(1,0,1) = 1 + x$$

$$T(0,1,1) = x$$

$$T(0,0,1) = 2$$

נמצא את הנוסחא המפורשת להעתקה:

ראשית, נציג וקטור כללי במרחב התחום כצירוף לינארי של וקטורי הבסיס

$$(a,b,c) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1)$$

נפתור את מערכת המשוואות המתקבלת:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c-b-a \end{array}\right)$$

$$(a,b,c) = a(1,0,1) + b(0,1,1) + (c-b-a)(0,0,1) \quad /T(\quad)$$

$$T(a,b,c) = a(1+x) + b(x) + (c-b-a)(2) = -a - 2b + 2c + (a+b)x$$