

תרגיל בית 1

1. יהיו \mathcal{A}_1 ו \mathcal{A}_2 שתי משפחות של קבוצות ב X . הראו כי אם $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

2. הראו כי העוצמה ("מספר" האיברים בקבוצה) של סיגמא אלגברה הינו סופי או לא בן מנייה, כלומר אם S הינה סיגמא אלגברה אזי $|S| \neq \aleph_0$.

3. נניח ו $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X, S) ו $\mu_n(A) \uparrow$ לכל $A \in S$ אזי $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$. האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

4. יהי (X, S, μ) ממ"ח הוכיחו כי הבאים שקולים:

א. לכל $E \in S$ מתקיים $\mu(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E, F \in S, \mu(F) < \infty\}$.

ב. אם $E \in S$ ו $\mu(E) = \infty$ אזי קיימת $E \supseteq G \in S$ כך ש $0 < \mu(G) < \infty$.