חקב"צ - הרצאה 2

10 בנובמבר 2011

דוגמה

יצרן אלומיניום מספק מתכת שמכילה לפחות 90% אלומיניום ו$5-8\%$ נחושת.
אין לו מלאים ויש לו הזמנה ל1000 ק"ג ב$0.45 לק"ג.
את המתכת הוא מייצר מחומרי גלם :
Al, Co, פסולת 1 (המורכבת מ95% Al, 3% Co, 2%) ופסולת 2 (85% Al, 1% Co, 14%)
העלויות לק"ג של חומרי גלם:

חומר	עלות לק"ג
Al	\$0.5
Co	\$0.6
פסולת 1	\$0.15
פסולת 2	\$0.05

עלות התכה היא $0.05 לקילו.
המטרה - מינימום עלות.
משתני החלטה - $x_{\mathrm{Al}}, x_{\mathrm{Co}}, x_1, x_2$
פונק' המטרה:

$$\min\ z = 0.5x_{\mathrm{Al}} + 0.6x_{\mathrm{Co}} + 0.05x_1 + 0.15x_2 + 50$$

$$\begin{aligned} &\text{subject to:} \\ x_{\mathrm{Al}} + 0.95x_1 + 0.85x_2 &\geq 900 \\ x_{\mathrm{Co}} + 0.03x_1 + 0.01x_2 &\leq 80 \\ x_{\mathrm{Co}} + 0.03x_1 + 0.01x_2 &\geq 50 \\ x_{\mathrm{Al}} + x_{\mathrm{Co}} + x_1 + x_2 &= 1000 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

ננסח את הבעיה כבעיית מקסימום ולא מינימום:
מטרה - מקסימום רווח.
משתני החלטה כנ"ל.
פונק' המטרה:

$$\max\ z = 450 - (0.5x_{\mathrm{Al}} + 0.6x_{\mathrm{Co}} + 0.05x_1 + 0.15x_2 + 50)$$

המשך ההרצאה

כל בעיה בתכנון לינארי ניתן לראות באופן הבא:

$$\begin{aligned} \max\ z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t :} & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &\leq b_i \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

(כאשר $i = 1, ..., m$).

דוגמה

לחברה 3 מפעלים, בכל מפעל יש זמן ייצור.
החברה רוצה לייצר 2 מוצרים, כך שכל מוצר מיוצר לפחות ב2 מפעלים (על מנת ליצור מוצר 1 צריך לייצר חלק במפעל א' ואת החלק השני במפעל ג').

מפעלים	שעות עבודה של מפעל ביום	זמן ייצור מוצר 1	זמן ייצור מוצר 2
א	4	1	0
ב	12	0	2
ג	18	3	2

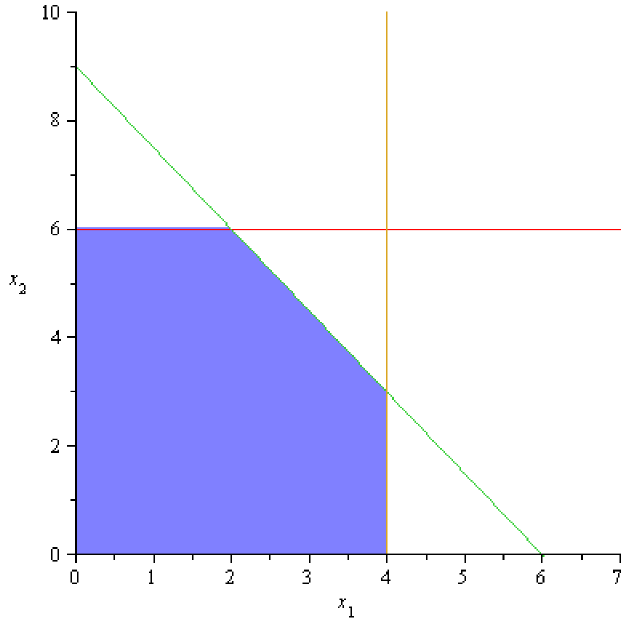
הרווח ליחידה של מוצר 1 הוא 3 ש"ח ושל מוצר 2 הוא 5 ש"ת.
המטרה - רווח מקסימלי.
משתני החלטה - x_j - מס' היחידות לייצור מכל מוצר.
פונק' המטרה:

$$\max\ z = 3x_1 + 5x_2$$

אילוצים:

$$\begin{aligned} &\text{subject to:} \\ x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

כאשר יש לנו בעיה בשני משתנים, ניתן לפתור את הבעיה בצורה גרפית.



איך נמצא את הפתרון הטוב ביותר?
ניקח למשל:

$$z = 3x_1 + 5x_2 = 10$$

ואז נבדוק אם אפשר

$$z = 3x_1 + 5x_2 = 20$$

ככל שניקח את הישר של פונק' המטרה ונעלה אותו כלפי מעלה נקבל עוד ועוד ישרים שיאפשרו פונק' מטרה גבוהה יותר מקודם וכל הלאה.
נק' החיתוך של הישר הזה עם התחום הוא הנק' בה הפונק' תקבל את ערכה המקסימלי.
במקרה זה:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 6$$

לכן

$$z = 36$$

אילוץ 2 ו3 משתתפים בפתרון ולכן נקראים "אקטיביים", ואילו אילוץ 1 לא משתתף בפתרון (שינוי בקיבולת זמן של אילוץ 1 לא בהכרח תשנה את התוצאה. בהמשך נלמד כיצד ניתן לשנות מקדמים שונים בפונק' מבלי לשנות את הפתרון).

תכונות הפתרון הגרפי

1. אם קיים פתרון אופטימלי יחיד, אז הוא חייב להיות פתרון פינתי אפשרי.
2. אם קיימים פתרונות אופטימליים מרובים, אזי שניים מהם לפחות חייבים להיות פינתיים אפשריים סמוכים.
3. קיימים מס' סופי של פתרונות אפשריים.
4. אם לפתרון פינתי אפשרי אין פתרון פינתי אפשרי סמוך טוב ממנו אזי לא קיים אף פתרון פינתי אפשרי טוב ממנו, כלומר הוא הפתרון האופטימלי.
5. קבוצת הפתרונות האפשריים היא קמורה.

הגדרה

קבוצה Ω מוגדרת כקבוצה קמורה אם לכל 2 נק' $x_1, x_2 \in \Omega$ מתקבל כי לכל $0 \leq \alpha \leq 1$, הנקודה $\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2$ נמצאת בתוך Ω.

מסקנה

כדי למצוא פתרון אופטימלי עלינו להסתכל על כל הנק' הפינתיות ולבחור את הנק' הטובה ביותר.
שיטת הsimplex תתחיל בנק' פינתית כלשהי ותבדוק האם ניתן לשפר את הפתרון ע"י אחת מהנקודות השכנות, אם לא זה יהיה הפתרון האופטימלי, אחרת נעבור לאחת הנק' השכנות ונבצע עליה את אותה הבדיקה וחוזר חלילה עד שנגיע לפתרון האופטימלי (בהנחה שיש כזה).