תורת הקבוצות — תרגיל בית 3
פתרונות

חיים שרגא רוזנר

י"ד באייר, תשע"ה*

תקציר

איזומורפיזם סדר, רישא, קבוצות סדורות היטב איזומורפיות; סודר עוקב, סודר גבולי, חיבור סודרים.

תזכורות

1. פונקציות שומרות סדר ורישאות

(א) תהיינה $(A,<),(B,\prec)$ קבוצות סדורות בסדר מלא, ותהי פונקציה $f\colon A\to B$. נאמר שפונקציה זו היא **שומרת סדר** (או: מונוטונית) אם לכל $x<y\in A$ מתקיים $f(x)\prec f(y)$. אם הפונקציה הזו היא הפיכה, אז היא נקראת **איזומורפיזם סדר**, ונסמן זאת $A\overset{f}{\cong}B$ (ניתן להשמיט את f לפי העניין).

(ב) תהי A קבוצה סדורה (בסדר מלא), B תת־קבוצה. נאמר ש־B היא **רישא** של A אם לכל $y\in B$ ולכל $x\in A$ המקיים $x<y$, מתקיים $x\in B$. במילים: רישא היא תת־קבוצה שכל קודמי איבריה הם איברים שלה.

(ג) תהי A קבוצה סדורה (בסדר מלא), $x\in A$. נסמן את ה**רישא הנקבעת על ידי x ב־**A כך:

$$\overset{x}{A}:=\{y\in A\colon y<x\}$$

יש רישאות שאינן נקבעות על ידי איבר כלל.

(ד) תהי $(A,<)$ קבוצה סדורה היטב. אזי קיים סודר אחד ויחיד δ כך ש־A איזומורפית סדר ל־δ.

2. הסודר העוקב, סודרים עוקבים וגבוליים, חיבור סודרים.

(א) $S(\alpha)=\alpha\cup\{\alpha\}$, וזה הסודר העוקב המיידי של α.

(ב) **סודר עוקב** הוא סודר β שקיים עבורו סודר α כך ש־$\beta=S(\alpha)$.

*להגשה עד יום **שני** ח' באייר (27 אפר') לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

(ג) **מספר טבעי** הוא סודר שהן הוא והן כל קודמיו הינם סודרים עוקבים או 0. נסמן את קבוצת המספרים הטבעיים על ידי

$$\omega := \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ω הוא הסודר הלא־טבעי הראשון. הוא גם הסודר הגבולי הראשון.

(ד) **סודר גבולי** הוא סודר שאיננו אפס ואיננו עוקב.

(ה) **חיבור סודרים**: יהיו α, β סודרים. נגדיר את **הסכום הזר** שלהם

$$\alpha \biguplus \beta := \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$$

ניתן להגדיר, באופן טבעי, סדר מילוני על קבוצה זו. הקבוצה $\alpha \biguplus \beta$ סדורה היטב על פי סדר זה, ולפי תזכורת 1ד קיים סודר אחד ויחיד אליו הקבוצה איזומורפית. נסמן סודר זה $\alpha + \beta$.

(ו) חיבור סודרים איננו חילופי (קומוטטיבי).

1 איזומורפיזם סדר ורישאות

בפרק זה יש בחירה בין שתי השאלות האחרונות.

1. בהרצאה הוגדרה רק רישא הנקבעת על ידי איבר (כמובא בתזכורת 1ג לעיל), והיא הוגדרה רק על קבוצות סדורות היטב. נעמוד כעת על ההבדלים שבין ההגדרה זו להגדרה שאני הבאתי, המופיעה בתזכורת 1ב שם.
תהי $(A, <)$ קבוצה סדורה <u>היטב</u> (לנוחותכם, ניתן להניח שהיא סודר, לפי סעיף 1ד). הבחינו בכך שכל רישא הנקבעת על ידי איבר ב־A היא רישא גם לפי תזכורת 1ב. מצאו אילו רישאות של A אינן נקבעות על ידי איבר.

פתרון ראשית נראה כי 1ג $\leftarrow$ 1ב. תהי $\overset{x}{A}$ רישא הנקבעת על ידי איבר, ויהי $y \in \overset{x}{A}$, $z \in A$, המקיימים $z < y$. לפי הגדרת $\overset{x}{A}$, ידוע ש־$y < x$, ומטרנזיטיביות של היחס $<$ נקבל $z < x$, ולכן $z \in \overset{x}{A}$. בכך הראנו שאכן $\overset{x}{A}$ רישא.
כעת נבדוק האם יש לקבוצה A רישאות נוספות. נניח B רישא שאיננה נקבעת על ידי איבר. נביט בקבוצה $A \setminus B$ זו תת־קבוצה של A, ואם היא איננה ריקה אז יש לה איבר ראשון x, ואז מתקיים $B = \overset{x}{A}$, בסתירה להנחה ש־B איננה נקבעת על ידי איבר. אולם אם קבוצה זו ריקה, הרי ש־$A = B$, ואכן אין איבר $x \in A$ עבורו $A = \overset{x}{A}$, כי $x \notin \overset{x}{A}$. לפיכך, בקבוצה סדורה היטב A כל רישא היא נקבעת על ידי איבר למעט הקבוצה A בעצמה, שהיא רישא שאיננה נקבעת על ידי איבר. ■

תוצאה האבחנה שעליה עמדנו עודדה את ההגדרה **רישא ממש**, שהיא הקבוצה B מהגדרה 1ב בתוספת התנאי $A \neq B$. אם משתמשים בהגדרה 1ב עבור קבוצות סדורות היטב, אז כל המשפטים על רישאות הנקבעות על ידי איבר נכונים לכל רישא ממש.

2. הוכיחו שהאיזומורפיזם היחיד מקבוצה סדורה היטב לעצמה הוא פונקציית הזהות.

הדרכה בהנתן איזומורפיזם $f\colon A\to A$ שאינו הזהות, קח $a\in A$ ראשון כך ש $f(a)\neq a$. בהכרח $f(a)<a$ או $f^{-1}(a)<a$.

פתרון נניח בשלילה f איזומורפיזם סדר אחר. אזי הקבוצה $X=\{a\in A\colon f(a)\neq a\}$ לא ריקה, ולכן יש לה ראשון a. אם כן, $f(a)\neq a$, ומטריכוטומיות נקבל $f(a)<a$ או $f(a)>a$.

נתחיל באפשרות הראשונה $f(a)<a$. נפעיל את f על אי־השויון הזה, ונקבל $f(f(a))<f(a)$, ולכן $f(a)\in X$, כי הוא מקיים את התנאי, ובסתירה לכך ש־a ראשון ב־X.

נעבור לאפשרות השניה $f(a)>a$. f הוא איזומורפיזם סדר, ובפרט פונקציה הפיכה. קל לראות כי הפונקציה ההופכית לאיזומורפיזם סדר היא איזומורפיזם סדר. נפעיל את האיזומורפיזם סדר f^{-1} על אי־שויון זה, ונקבל $a=f^{-1}(f(a))>f^{-1}(a)$. את הקבוצה X ניתן להגדיר גם $X=\{a\in A\colon f^{-1}(a)\neq a\}$, ובהתאם לכך הראנו כאן כי $f^{-1}(a)\in X$, ובסתירה לכך ש־a ראשון שם.

לסיכום, בכל אפשרות שבדקנו מצאנו סתירה, דהיינו הקבוצה X ריקה, ו־f הוא פונקציית הזהות. ■

3. הוכיחו שאם $A\cong B$ קבוצות סדורות היטב, אז האיזומורפיזם ביניהן הוא יחיד. הסיקו שהאיזומורפיזם היחיד מקבוצה סודרה היטב לעצמה הוא פונקצית הזהות.

פתרון נניח בשלילה כי f,g שני איזומורפיזמים שונים מ־A ל־B. יהי $a\in A$ הראשון עבורו $f(a)\neq g(a)$. מטריכוטומיות בה"כ $f(a)<g(a)$. איזומורפיזם סדר הוא פונקציה הפיכה, וההפכית לו גם היא איזומורפיזם סדר. נפעיל על האי־שויון האחרון את g^{-1}, ונקבל $g^{-1}(f(a))<a$. נסמן $x=g^{-1}(f(a))$. בפרט $x\neq a$. נבדוק מי יותר גדול.

- $x<a$. מכיוון ש־a הוא הראשון עבורו f,g אינן מתיישבות, מתקיים
$$f(x)=g(x)=g\left(g^{-1}(f(a))\right)=f(a)$$
ובסתירה לחד־חד־ערכיות של f (או לשמירת הסדר של f).
- $a<x$. נפעיל את g על אי־שויון זה, ונקבל
$$g(a)<g(x)=g\left(g^{-1}(f(a))\right)=f(a)$$
ובסתירה להנחה בה"כ $f(a)<g(a)$.

לסיכום, כל הנחה עבורה $g^{-1}(f(a))<a$ מובילה לסתירה. מטעמי סימטריה, ניתן להחליף כאן $<$ עם $>$, ומטריכוטומיות האפשרות היחידה היא $f(a)=g(a)$ לכל $a\in A$. סתירה להנחה שהן שונות. ■

4. לקבוצה סדורה היטב A אין שתי רישאות הנקבעות על ידי איברים שונים שהן איזומורפיות זו לזו: אם $x,y\in A$ ומתקיים $\overset{x}{A}\cong\overset{y}{A}$, אז $x=y$.

פתרון נראה על דרך השלילה: נניח כי $x\in A$ הוא הראשון עבורו קיים $y\in A$ שעבורם הטענה אינה מתקיימת. מטעמי סימטריה, ברור ש־$x<y$ (נמקו!). עבור x זה, נבחר y שמפר את הטענה. נסמן את האיזומורפיזם שאנו יודעים על קיומו $f\colon\ \overset{x}{A}\to\overset{y}{A}$. מכיוון ש־$x<y$, הרי מתקיים גם $x\in\overset{y}{A}$, ולפיכך ניתן

לסמן $z = f^{-1}(x)$, ונקבל $z \in \overset{x}{A}$, דהיינו $z < x$. מכיוון שבאיזומורפיזם סדר, רישא עוברת לרישא, ניתן להביט באיזומורפיזם המצומצם $\tilde{f}: \overset{z}{\left(\overset{x}{A}\right)} \to \overset{x}{\left(\overset{y}{A}\right)}$.
זהו איזומורפיזם סדר, ולכן $\overset{x}{A} = \overset{x}{\left(\overset{y}{A}\right)} \cong \overset{z}{\left(\overset{x}{A}\right)} = \overset{z}{A}$, ובסתירה להנחה ש־$x$ הוא הראשון המקיים זאת (כי $z < x$). ■

2 סודרים

1. יהיו α, β, γ סודרים. הראו כי מתקיימת אסוציטיביות: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

הדרכה שניהם איזומורפיים ל $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta) \cup (\{2\} \times \gamma)$.

פתרון נתעלם מההדרכה. חיבור סודרים מוגדר בעזרת איזומורפיזם סדר שנקרא טיפוס הסדר, לכן במקום לדבר על הסודר המתאים מספיק לבדוק מה קורה לאיחוד הזר $\uplus$. נברר מה הוא אגף ימין:

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma) &\cong \alpha \uplus (\beta \uplus \gamma) = \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times (\{0\} \times \beta \cup \{1\} \times \gamma) \\ &= \{0\} \times \alpha \cup \{(1,0)\} \times \beta \cup \{(1,1)\} \times \gamma\end{aligned}$$

באופן דומה אגף שמאל איזומורפי סדר לקבוצה

$$\{(0,0)\} \times \alpha \cup \{(0,1)\} \times \beta \cup \{1\} \times \gamma$$

נגדיר איזומורפיזם סדר מאגף ימין לאגף שמאל כך:

$$f(x) = \begin{cases} (0,0,\delta) & x = (0,\delta) \\ (0,1,\delta) & x = (1,0,\delta) \\ (1,\delta) & x = (1,1,\delta) \end{cases}$$

זהו איזומורפיזם סדר (בדקו!) המראה כי טיפוסי הסדר של שתי הקבוצות האלו שווים. ■

2. **חיסור סודרים:** יהיו $\alpha \le \beta$. נגדיר חיסור סודרים $\beta - \alpha := \mathrm{type}(\beta \setminus \alpha)$. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$.

(ב) $\alpha = \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha = 0$.

(ג) $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \beta - \alpha > 0$.

פתרון

(א) נביט בקבוצה $\alpha \uplus (\beta \setminus \alpha)$, ונמצא איזומורפיזם סדר ממנה ל־β.

$$f(b, \delta) = \delta$$

נראה שזהו איזומורפיזם סדר. קל לראות כי ההגדרה של הפונקציה היא נכונה, דהיינו זהו יחס חד־ערכי מהתחום אל הטווח. נראה שמירת סדר. אם ניקח שני איברים שהרכיב הראשון שלהם זהה (דהיינו שניהם מייצגים איברים של α או ששניהם מייצגים איברים של $\beta \setminus \alpha$), ברור שהפונקציה שומרת על סדרים. נבדוק מה קורה הרכיב הראשון בין שני האיברים שונה: כאשר האיברים הם $(0, \delta_1), (1, \delta_2)$. אזי מתקבל $\delta_1 \in \alpha, \delta_2 \in \beta \setminus \alpha$. α הוא רישא[1] של β, כמו כל שני סודרים, ומהגדרת רישא מתקיים $\delta_2 \notin \alpha$, ולכן $\delta_2 \not< \delta_1$. מהגדרת הפרש קבוצות, החיתוך $\alpha \cap (\beta \setminus \alpha)$ ריק, ולכן $\delta_1 \neq \delta_2$. טריכוטומיות סודרים משאירה את האפשרות $\delta_1 < \delta_2$, דהיינו $f(0, \delta_1) < f(1, \delta_2)$. נותר רק להראות שהפונקציה על, וזאת נשאיר לתרגול עצמי.

(ב) אם $\beta = \alpha$, אז $\beta - \alpha = \mathrm{type}(\beta \setminus \alpha) = \mathrm{type}(\varnothing) = 0$. בכיוון השני, נניח $\beta - \alpha = 0$, דהיינו $\mathrm{type}(\beta \setminus \alpha) = \varnothing$. איזומורפיזם סדר הוא גם שויון עוצמות, אך קבוצה מעוצמה אפס יש רק אחת, ולכן שויון עוצמות מוביל במקרה זה לשויון קבוצות. לכן $\beta \setminus \alpha = \varnothing$, דהיינו $\beta \subseteq \alpha$. ההכלה בכיוון השני נתונה בהגדרה: $\alpha \leq \beta$.

(ג) סעיף זה הוא שלילה של קודמו, בהנחת $\alpha \leq \beta$. ■

תרגיל רשות

3. ניתן הגדרה פורמלית ל־ω:

תהי X קבוצה. נאמר ש־X היא קבוצה **אינדוקטיבית** אם מתקיים $\varnothing \in X$ וכן לכל $x \in X$ גם $x \cup \{x\} \in X$. לפי האקסיומות, קיימת קבוצה אינדוקטיבית.[2] כעת נגדיר

$$\omega := \cap \{X : X \text{ is inductive}\}$$

לפי האקסיומות, קל להראות כי ω היא קבוצה מוגדרת היטב[3].

(א) הראו כי לכל קבוצה אינדוקטיבית X גם הקבוצה $X \cap ON$ (קבוצת הסודרים שב־X) היא אינדוקטיבית.

(ב) הראו כי כל סודר גבולי הוא אינדוקטיבי.

(ג) הראו כי ω היא קבוצת סודרים.

(ד) הראו כי היא סודר.

(ה) הראו כי היא סודר גבולי.

(ו) הראו כי היא הסודר הגבולי הקטן ביותר (שאיננו 0).

(ז) הראו כי ω היא קבוצת הסודרים הטבעיים.

הדרכה לסעיף (ג), הראו כי קיים סודר קטן ביותר γ שאיננו ב־ω. הראו כי $\omega \subseteq \gamma$. הראו כי γ קבוצה אינדוקטיבית, והסיקו $\gamma \subseteq \omega$. לסעיף (ד), הראו כי ω (או γ שמצאתם בסעיף הקודם) איננה אפס ואיננה סודר עוקב. לסעיף (ה), הניחו בשלילה כי α סודר גבולי המקיים $0 < \alpha < \omega$. מדוע $\omega \subseteq \alpha$, והגיעו לסתירה.

---

[1] לא בהכרח רישא־ממש.

[2] לפי אחד הנוסחים של ZFC, אקסיומת האינסוף היא האקסיומה הקובעת כי קיימת קבוצה אינדוקטיבית. בקורס שלנו נלמד ניסוח אחר לאקסיומות, ואקסיומת האינסוף תהיה קיימת הקבוצה ω.

[3] תהי $\tilde{X}$ קבוצה אינדוקטיבית. אזי

$$\omega = \bigcap \left\{ X \in \mathcal{P}\left(\tilde{X}\right) : X \text{ is inductive} \right\}$$

(נמקו את השויון). כשנלמד על האקסיומות יהיה ברור מדוע ניסוח זה מוגדר היטב, ואם לא יהיה ברור — שאלו אותי אז.

פתרון

(א) עלינו להראות כי $\varnothing \in X \cap ON$ וכי אם $x \in X \cap ON$ אז גם $x \cup \{x\} \in X \cap ON$. ואכן, הקבוצה הריקה היא סודר, ואם x הוא סודר אז גם $x \cup \{x\} = S(x) = x + 1$ הוא סודר. בעזרת X שקיומו מובטח מהאקסיומה, נסמן $Y := X \cap ON$ לצרכי הסעיפים הבאים. מצאנו כי Y קבוצה אינדוקטיבית.

(ב) נניח β סודר גבולי. אזי $\varnothing \in \beta$ (כי אפס לא גבולי). כמו־כן, הראנו בכיתה שבסודר גבולי כל איבר בסודר מקיים שגם עוקבו נמצא שם, כנדרש.

(ג) נתעלם ממהדרכה לסעיף זה. לפי סעיף (א), Y היא קבוצה אינדוקטיבית, אך בנוסף היא קבוצת סודרים. לכן מתקיים $\omega \subseteq Y$. מצאנו אפוא כי ω היא קבוצת סודרים.

(ד) ω היא קבוצת סודרים. נניח בשלילה כי היא לא סודר. כדי שקבוצת סודרים תהיה סודר, יש להראות רק כי היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית. נניח אפוא בשלילה כי ω איננה $\in$־טרנזיטיבית. לפי תרגיל בית 2 פרק 1 שאלה 1, טענה שקולה היא $(\bigcup \omega) \setminus \omega \neq \varnothing$. זו קבוצת סודרים לא ריקה, ולכן יש לה איבר ראשון, נסמנו $x \in (\bigcup \omega) \setminus \omega$. x הוא סודר, כי הוא איבר של איחוד על קבוצת סודרים, ולכן ניתן לבדוק אם הוא אפס, עוקב או גבולי. נבדוק כל אפשרות ונגיע לסתירה.

- נניח x אפס. אבל לפי ההגדרה לכל קבוצה אינדוקטיבית, אפס הוא איבר שלה. לכן אפס נמצא בחיתוך של כולן. מצאנו אפוא $x \in \omega$, סתירה.
- x גבולי. אזי לפי סעיף (ב), x אינדוקטיבי, ומתקיים $\omega \subseteq x$. מנגד, לפי הגדרת איחוד, קיים y כך ש־$x \in y \in \omega$. סה"כ מצאנו $x \in y \in x$, סתירה.[4]
- x עוקב ל־y. אזי $x = y \cup \{y\}$. x ראשון מחוץ ל־ω, דהיינו $y \in \omega$ (כי $y < x$). מכיוון ש־ω אינדוקטיבית, גם $x = y \cup \{y\}$ נמצא ב־ω, סתירה.

מצאנו בכל האפשרויות סתירה, ולכן $(\bigcup \omega) \setminus \omega = \varnothing$, ו־$\omega$ היא קבוצה $\in$־טרנזיטיבית, ולפיכך היא סודר.

(ה) נניח בשלילה כי ω איננה סודר גבולי. כבר אמרנו שלכל X קבוצה אינדוקטיבית, מתקיים $\varnothing \in X$, ולכן $\varnothing \in \omega$, ובפרט ω איננה ריקה. נותרנו עם האפשרות ש־ω עוקב לאיזה איבר x. אבל אז נקבל שגם העוקב ל־x נמצא ב־X לכל קבוצה X אינדוקטיבית, דהיינו $\omega = x \cup \{x\} \in \omega$, סתירה לאנטי־רפלקסיביות.

(ו) נניח בשלילה כי יש סודר גבולי קטן יותר γ דהיינו $\gamma \in \omega$. אזי לפי סעיף (ב) $\omega \subseteq \gamma$, וביחד זו סתירה לאנטי־רפלקסיביות.

(ז) השלילה של הטענה 'לכל $x \in \omega$, x טבעי' היא הטענה 'קיים $x \in \omega$ כך ש־x גבולי או שקיים לפניו איבר גבולי'. נניח אפוא כי γ הוא סודר גבולי המקיים $\gamma \leq x$, בסימונים של ההנחה בשלילה שניסחנו כאן. קיבלנו $\gamma < \omega$, סתירה לסעיף (ו).

נותר להראות כי כל טבעי נמצא בקבוצה ω. נניח בשלילה שיש טבעי מחוץ לקבוצה, נסמן n את הטבעי הקטן ביותר שאיננו ב־ω. $0 \in \omega$, לפי ההגדרה של קבוצה אינדוקטיבית, ולכן n עוקב לאיזה m. m זה שייך ל־ω (כי n קטן ביותר שאיננו שייך ל־ω), ולכן גם עוקבו n שם. אך מכיוון שהקבוצה ω אינדוקטיבית, גם $n = m \cup \{m\} \in \omega$. סתירה. ■

ב ה צ ל ח ה!

[4] לאקסיומת היסודיות ו/או לאנטי־סימטריה של יחס הסדר $\in$.