(I)

פיסיקה קלאסית 1 - תרגיל 7

(1) א. אחד המדדים לבחינת כוח משמר הינו $\vec\nabla\times\vec F=0$:

$$\vec\nabla\times\vec F=\begin{vmatrix}\hat x & \hat y & \hat z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ c(2x+3y) & d(3x+4y) & 0\end{vmatrix}=\begin{matrix}\hat x(0-0)\\ -\hat y(0-0)\\ \hat z(d3-c3)\end{matrix}$$

התנאי לכך ש-F יהיה כוח משמר הינו $\boxed{c=d}$

ב. עבודה מוגדרת $W=\int \vec F\cdot dr$

המסלול שניתן הינו $\vec r=(a\cos\theta, a\sin\theta)$

לכן $dr=(-a\sin\theta d\theta, a\cos\theta d\theta)$

גם את F נמיר לכתיב קטבי ע"י $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$

עתה ניתן לכתוב הכל ולחשב!

$$W=\int\vec F\cdot dr=\int_0^{2\pi}\Big(c(2a\cos\theta+3a\sin\theta),\ d(3a\cos\theta+4a\sin\theta)\Big)\cdot(-a\sin\theta d\theta,\ a\cos\theta d\theta)=$$

$$=-ca^2\int_0^{2\pi}(2\cos\theta+3\sin\theta)\sin\theta d\theta+da^2\int_0^{2\pi}(3\cos\theta+4\sin\theta)\cos\theta d\theta=$$

$$=-ca^2\int_0^{2\pi}(2\cos\theta\sin\theta+3\sin^2\theta)d\theta+da^2\int_0^{2\pi}(3\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta)d\theta=-ca^2\int_0^{2\pi}\sin2\theta+3\tfrac12(1-\cos2\theta)d\theta+$$
$$+da^2\int\left(3\tfrac12(1+\cos2\theta)+2\sin2\theta\right)d\theta$$

$$=-ca^2\left[-\tfrac12\cos2\theta+\tfrac32\theta-\tfrac32\tfrac12\sin2\theta\right]_0^{2\pi}+da^2\left[\tfrac32\theta+\tfrac32\cdot\tfrac12\sin2\theta-2\tfrac12\cos2\theta\right]_0^{2\pi}=$$

$$-ca^2\left[-\tfrac12(1-1)+\tfrac32 2\pi-\tfrac34(0-0)\right]+da^2\left[\tfrac32 2\pi+\tfrac34(0-0)-(0-0)\right]=\underline{3\pi a^2(-c+d)}$$

(II)

ג. עתה המסלול מוגדר כ:

$$r=(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$$
$$dr=(-a\sin\theta d\theta,\ b\cos\theta d\theta) \rightarrow \begin{array}{l} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{array}$$

ולכן העבודה היא:

$$\boxed{W=\int \vec{F}\cdot dr = -c\int_0^{2\pi}(2a\cos\theta+3b\sin\theta)a\sin\theta d\theta + d\int_0^{2\pi}(3a\cos\theta+4b\sin\theta)b\cos\theta d\theta = \rightarrow}$$

$$\rightarrow = -ca\int_0^{2\pi}\left[a\sin 2\theta+3b\tfrac{1}{2}(1-\cos2\theta)\right]d\theta + db\int_0^{2\pi}\left[3a\tfrac{1}{2}(1+\cos2\theta)+2b\sin2\theta\right]d\theta = \rightarrow$$

$$\rightarrow = -ca\left[-a\tfrac{1}{2}\cos2\theta+\tfrac{3}{2}b\theta-\tfrac{3}{2}b\tfrac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{2\pi} + db\left[\tfrac{3}{2}a\theta+\tfrac{3}{2}a\tfrac{1}{2}\sin2\theta-2b\tfrac{1}{2}\cos2\theta\right]_0^{2\pi} = \rightarrow$$

$$\rightarrow = -ca\left[-a\tfrac{1}{2}(0-0)+\tfrac{3}{2}b2\pi-\tfrac{3}{4}b(0-0)\right] + db\left[\tfrac{3}{2}a2\pi+\tfrac{3}{4}a(0-0)-b(0-0)\right] = \rightarrow$$

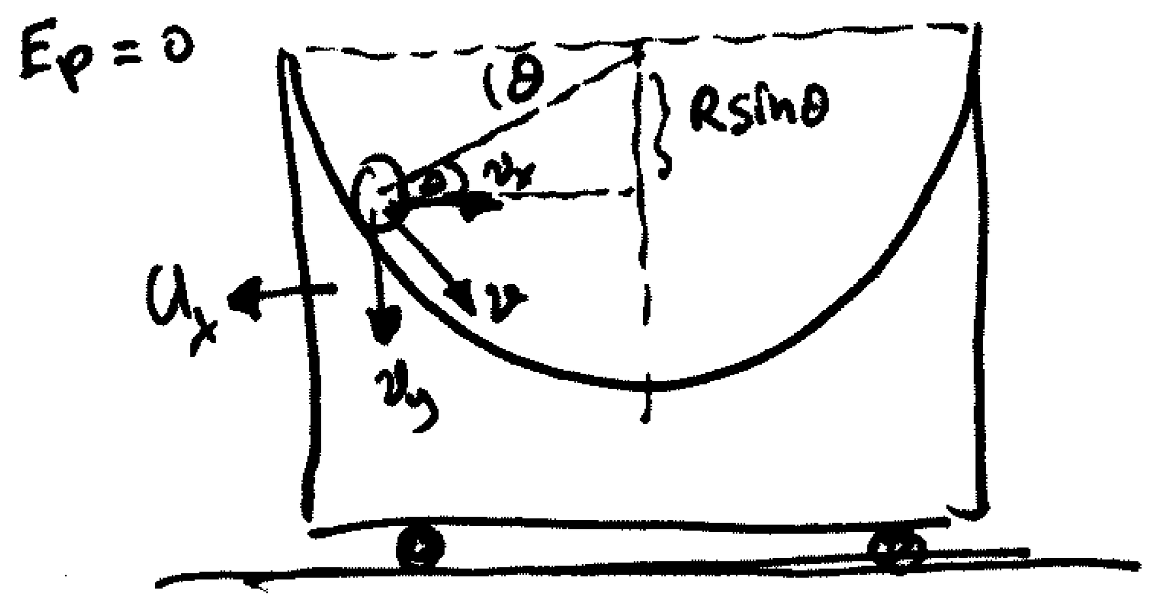
$$\rightarrow = -cab3\pi + dba3\pi = \underline{3\pi ab(-c+d)}$$

ד. די קל לראות כי העבודה שמצאנו בסעיפים א' וב' מתאפסת כאשר $c=d$

סעיף א' $W=3\pi a^2(-c+d)\Big|_{c=d}=0$

סעיף ב' $W=3\pi ab(-c+d)\Big|_{c=d}=0$

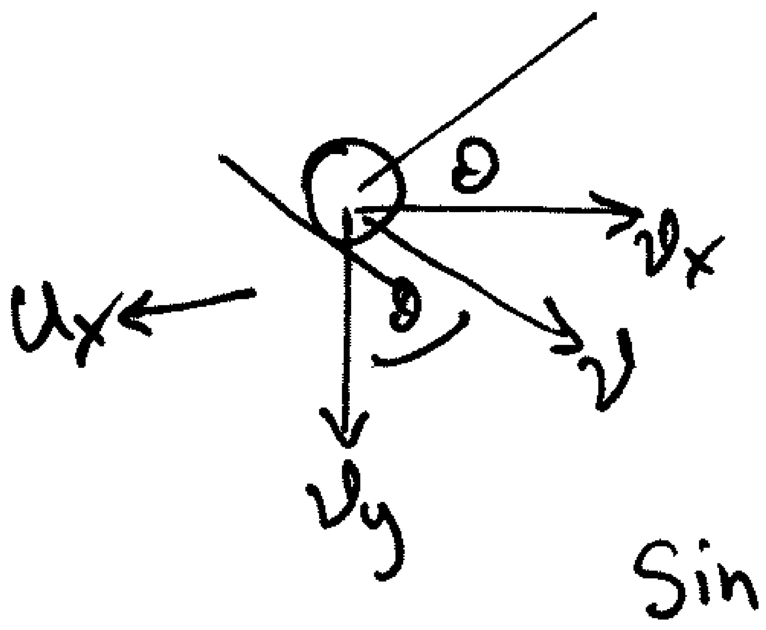
(2) א. עבור שימור אנרגיה אנו צריכים להגדיר את הקודה בקואורדינטות הטנגנציאליות של מת המהירות הממוצעת ניקח נאות כגובה של הקצוות (A או C).



$$E_p+E_k=Const$$

$$mg(-R\sin\theta)+\tfrac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+\tfrac{1}{2}M(u_x^2+\underbrace{u_y^2}_{0})=Const$$

נגדיר את $\sin\theta$ לפי המהירויות כך



$$\sin\theta=\frac{|v_x-u_x|}{|\vec{v}-u|}=\frac{|v_x-u_x|}{\sqrt{(v_x-u_x)^2+v_y^2}}$$

ולכן:

$$\boxed{\tfrac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+\tfrac{1}{2}M(u_x^2)-mgR\frac{|v_x-u_x|}{(v_x-u_x)^2+v_y^2}=Const}$$

(III)

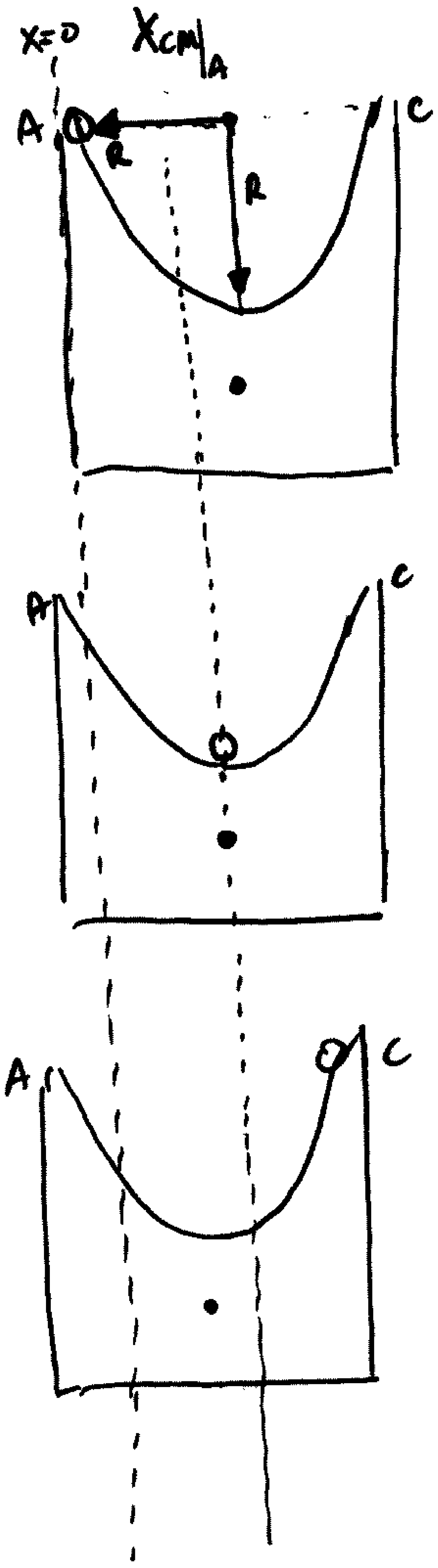
שימור תנע יש לנו בציר x, שכן לא פועלים כוחות!

$$\boxed{m v_x + M U_x = Const = 0}$$

שכך המצב ההתחלתי!

ב. הנקודה שבה m תהיה בשיא הגובה היא כאשר $v_y=0$ ואז על m ו-M לנוע באותה מהירות $v_x=U_x$. מתוך שימור תנע נובע כי $v_x=U_x=0$.

עתה ברור משימור אנרגיה כי m תגיע לנקודה C.



עתה נבחר את ראשית הצירים בנקודה A (בהתחלת התנועה) ונעזר בחישוב של מרכז המסה של שני הגופים.
מרכז המסה של שני הגופים לא משתנה ולכן נוכל למצוא אותו כאשר m נמצא בנקודה A וגם לאחר מכן כאשר m נמצא ב-C.
מרכז המסה של M נמצא במרכזו של M.

$$X_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m X_m + M X_M}{m+M}$$

A: $X_m = 0$

$$X_M = X_m + R = 0 + R = R$$

$$\hookrightarrow X_{cm}\Big|_A = \frac{0 + MR}{m+M} = \frac{M}{M+m} R$$

C: $X_m = ?$

$$X_M = X_m - R$$

$$\hookrightarrow X_{cm} = \frac{m X_m + M(X_m - R)}{m+M}$$

מאחר ומרכז המסה של שני הגופים קבוע:

$$\frac{M}{M+m} R = \frac{m X_m + M(X_m - R)}{M+m}$$

$$MR = m X_m + M X_m - MR$$

$$2MR = (m+M) X_m$$

$$\hookrightarrow \boxed{X_m = 2R \frac{M}{M+m}} \rightarrow$$ יחסית לראשית הצירים (נקודה A)

(IV)

א. (3)

$$\vec{f}_1 = \vec{a}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{matrix} \hat{x}\,(a_y z - a_z y) \\ -\hat{y}\,(a_x z - a_z x) \\ \hat{z}\,(a_x y - a_y x) \end{matrix}$$

$$\vec{f}_2 = (\vec{a}\cdot\vec{r})\cdot\vec{a} = \left((a_x,a_y,a_z)\cdot(x,y,z)\right)(a_x,a_y,a_z) = (a_x x + a_y y + a_z z)(a_x,a_y,a_z)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{f}_1 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_y z - a_z y & -(a_x z - a_z x) & (a_x y - a_y x) \end{vmatrix} = \begin{matrix} \hat{x}\,(a_x + (a_x)) \\ -\hat{y}\,(-a_y - a_y) \\ \hat{z}\,(a_z - (-a_z)) \end{matrix} = \begin{matrix} 2a_x\hat{x} \\ 2a_y\hat{y} \\ 2a_z\hat{z} \end{matrix} \neq 0 \;\downarrow$$

לא משמר

$$\vec{\nabla}\times f_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (a_x x + a_y y + a_z z)a_x & (a_x x + a_y y + a_z z)a_y & (a_x x + a_y y + a_z z)a_z \end{vmatrix} = \begin{matrix} \hat{x}\,(a_y a_z - a_z a_y) \\ -\hat{y}\,(a_x a_z - a_z a_x) \\ \hat{z}\,(a_x a_y - a_y a_x) \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

כן משמר

ב. כדי למצוא את הפוטנציאל נחשב תחילה את העבודה שיש לעשות מראשית הצירים לנקודה כלשהי $\vec{r}$. מאחר והכוח בראשית הצירים הינו אפס הרי כי הפוטנציאל שם גם כן מתאפס ולכן

$$W = U(0,0,0) - U(r) = -U(r)$$

$$W = \int_0^r \vec{F}\cdot dr = \int_0^r (\vec{a}\cdot\vec{r})\,a\,dr = \int_0^{\vec{a}\cdot\vec{r}} p\,dp = \frac{1}{2}p^2\Big|_0^{\vec{a}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{r})^2$$

$$p = \vec{a}\cdot\vec{r}$$
$$dp = \vec{a}\cdot dr$$

ולכן

$$\boxed{U(r) = -\frac{1}{2}(a_x x + a_y y + a_z z)^2}$$

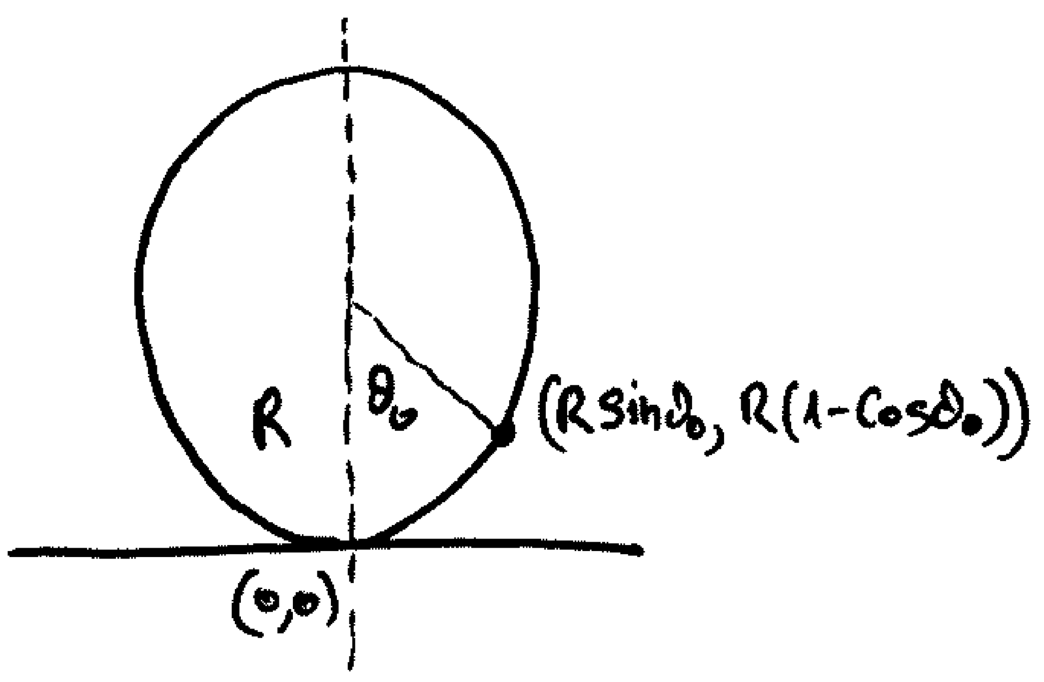
(V) (4)

א'

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2bxy & bx^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \hat{x}(0-0) \\ -\hat{y}(0-0) \\ \hat{z}(2bx-2bx) \end{matrix} = 0$$

$\boxed{F \text{ הינו כח משמר}}$

ב'



מאחר ו-F הינו כח משמר אנו יכולים לבחור איזה מסלול שנרצה כדי לחשב את העבודה.

נבחר במסלול $(0,0) \to (R\sin\theta_0, 0)$

$+$

$(R\sin\theta_0, 0) \to (R\sin\theta_0, R(1-\cos\theta_0))$

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{0,0}^{R\sin\theta_0,0} F_x\,dx + \int_{R\sin\theta_0,0}^{R\sin\theta_0,R(1-\cos\theta_0)} F_y\,dy$$

$$\int_{0,0}^{R\sin\theta_0,0} F_x\,dx = \int_{0\,0}^{R\sin\theta_0,0} 2bx\underset{0}{\underset{\downarrow}{y}}\,dx = 0$$

$$\int_{R\sin\theta_0,0}^{R\sin\theta_0} F_y\,dy = \int_{R\sin\theta_0,0}^{R\sin\theta_0,R(1-\cos\theta_0)} bx^2\,dy = b\left[x^2y\right]_{R\sin\theta_0,0}^{R\sin\theta_0,R(1-\cos\theta_0)} = bR^2\sin^2\theta_0\left(R(1-\cos\theta_0)-0\right) = bR^3\sin^2\theta_0(1-\cos\theta_0)$$

$$\boxed{W = 0 + bR^3\sin^2\theta_0(1-\cos\theta_0)}$$

ג'

$$W = V(0,0) - V(x,y)$$

$$\boxed{V(x,y) = -bR^3\sin^2\theta_0(1-\cos\theta_0) = -bx^2y}$$

$x = R\sin\theta_0$
$y = R(1-\cos\theta_0)$

ד'

מטיות סרטין הבקה:

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$

מאחר והמהירויות הן $v(v_x, v_y)$

$$W = \int_0^T (2xyb, bx^2)\cdot(v_x, v_y)\,dt$$

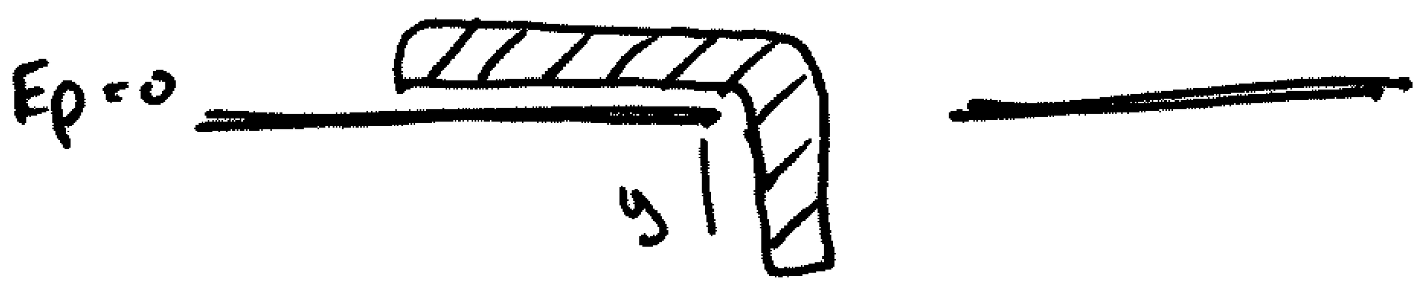
כמו כן $x = v_x t;\ y = v_y t$

$$\boxed{W = 2b\int_0^T v_x^2 v_y t^2\,dt + b\int_0^T v_x^2 v_y t^2\,dt = 3bv_x^2v_y\int t^2\,dt = bv_x^2v_y\,t^3\Big|_0^T = bv_x^2v_yT^3}$$

נתון: $y(t=0) = -l_0$

$\dot{y}(t=0) = 0$

אין חיכוך ולכן ניתן להשתמש בשימור אנרגיה. נגדיר $E_p = 0$ בגובה השולחן



נרשום את שימור האנרגיה

$$E_p + E_k = Const$$

נרשום אנרגיה קינטית:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

נרשום אנרגיה פוטנציאלית

$$E_p = \left(\frac{m}{L}\right) y\, g \left(-\frac{1}{2} y\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{m}{L}\right) g y^2$$

והכל ביחד:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{L}\right) g y^2 + \frac{1}{2} m v^2 = Const$$

$$\hookrightarrow v = \dot{y}$$

נגזור לפי הזמן:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{L}\right) g\, 2 y \dot{y} + \frac{1}{2} m\, 2 \dot{y} \ddot{y} = 0 \quad / m\dot{y}$$

$$-\left(\frac{1}{L}\right) g y + \ddot{y} = 0$$

$$\ddot{y} - \left(\frac{g}{L}\right) y = 0$$

פתרון המשוואה:

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{g}{L}} t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}} t}$$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}}\left(c_1 e^{\sqrt{\frac{g}{L}} t} - c_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{L}} t}\right)\Big|_{t=0} = \sqrt{\frac{g}{L}}(c_1 - c_2) = 0$$

$$\hookrightarrow c_1 = c_2$$

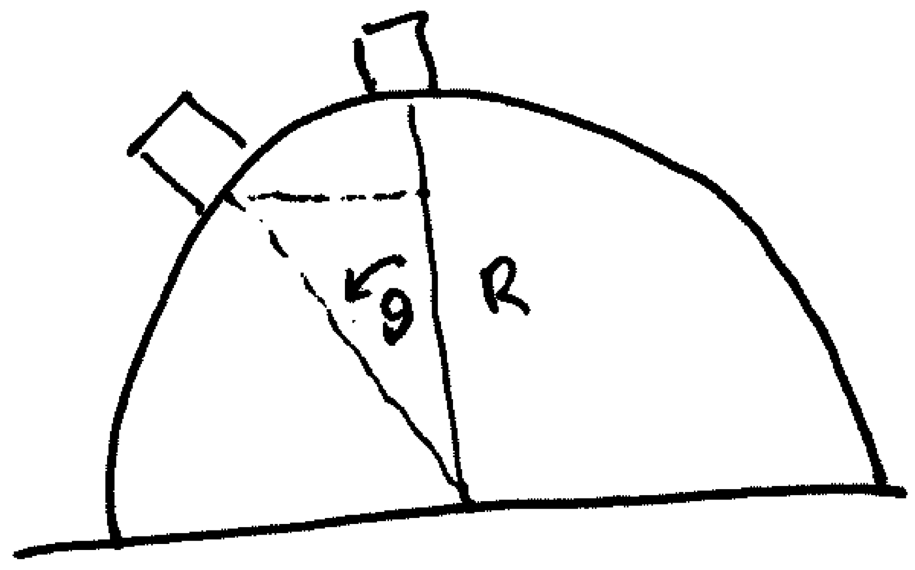
$$\left.\begin{aligned} y(t) &= c_1\left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}} t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}} t}\right) \\ y(t=0) &= -l_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -l_0 = c_1(1+1) = 2c_1$$

$$\downarrow$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} l_0$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2} l_0 \left(e^{\sqrt{\frac{g}{L}} t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}} t}\right) = -l_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)}$$

(VI)



(5) א. אם נגדיר $E_p\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$

אזי $\boxed{E_p(\theta)=mgR\cos\theta}$

ב. מאחר ויש רק כוחות משמרים פועלים:

$$E_p+E_k=\text{Const}\ (=E_p(\theta=0))$$

$$\downarrow$$

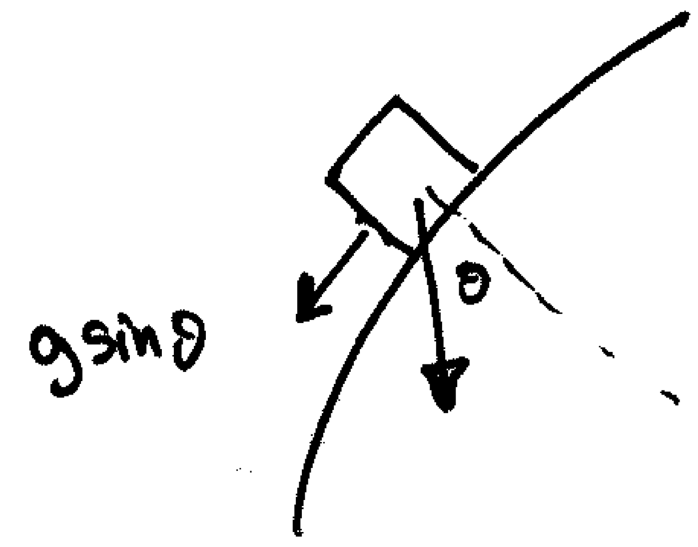
$$E_k(\theta)=E_p(\theta=0)-E_p(\theta)$$

$$\boxed{E_k=mgR-mgR\cos\theta=mgR(1-\cos\theta)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2=\cancel{m}gR(1-\cos\theta)\rightarrow v^2=2gR(1-\cos\theta)$$

ג. התאוצה הרדיאלית בתנועה מעגלית היא בהגדרה:



$$\boxed{a_r=-\frac{v^2}{R}=-\frac{2g\cancel{R}(1-\cos\theta)}{\cancel{R}}=-2g(1-\cos\theta)}$$

מצד שני בכיוון המשיקי ניתן לכתוב שקול כוחות:

$$\Sigma F=mg\sin\theta=ma$$

$$\hookrightarrow \boxed{a=g\sin\theta}$$

ד. בזווית שבה יתנתק הגוף התאוצה הרדיאלית שגורם כח הכבידה $g\cos\theta$ איננה יכולה להתגבר על התאוצה הרדיאלית במעגל כפי שהיא מוגדרת על ידי מהירות:

$$g\cos\theta\geq\frac{v^2}{R}=\frac{2g\cancel{R}(1-\cos\theta)}{\cancel{R}}$$

כל עוד התנאי הזה מתקיים התנועה תהיה מעגלית בצמוד לפני החצי מעגל.

$$\cos\theta\geq 2-2\cos\theta$$

$$\boxed{\cos\theta\geq\frac{2}{3}}\longrightarrow\theta=0.84\text{ rad}$$