המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 05 222 - 88 – סמסטר ב' תשע"ו, 13.7.16 מבחן מועד א'
המרצה: מיכאל מגרל המתרגלים: תמר נחשוני, אלעד עטייא, איתמר שטיין
משך המבחן: 3 שעות

תשובות מקוצרות:

1. א. הוכיחו שבמרחב מטרי $X=(\mathbb{Z},d_p)$ עם המטריקה ה p-אדית כל כדור $B(0,r)$ קבוצה סגוחה ותת חבורה ב $(\mathbb{Z},+)$.

ב. נניח (X,d) מרחב מטרי קומפקטי. הוכיחו שהמרחב הוא שלם, חסום כליל וספרבילי.

<u>פתרון</u>: א. תרגיל בית מספר 2 שאלה 4.

ב. <u>שלמות</u> (X,d) גם קומפקטי סדרתית. בפרט לכל סדרת Cauchy יש תת סדרה מתכנסת ואז כידוע גם הסדרה הנ"ל מתכנסת.

<u>ח"כ</u> בגלל הקומפקטיות, לכל ε-כיסוי $\{B(x,\varepsilon):x\in X\}$ יש תת כיסוי סופי $\{B(x,\varepsilon):x\in A_\varepsilon\subset \mathrm{X}\}$

<u>ספרביליות</u> תת קבוצה בת מנייה $A:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$ היא ε-צפופה לכל ε. לכן A צפופה ב X.

2. נתונה פונקציה $f:X\to Y$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם הפונקציה היא רציפה אז הגרף $Gr(f):=\{(x,y)\in X\times Y: y=f(x)\}$ (כתת מרחב של $X\times Y$) הוא הומיאומורפי ל X.

ב. אם הגרף $Gr(f)$ מרחב קשיר אז $f:X\to Y$ רציפה.

<u>פתרון</u>: א. נכון. הפונקציה $h:Gr(f)\to \mathrm{X}, (x,\mathrm{f(x)})\mapsto x$ הומאומורפיזם.

חח"ע -- ברור. h רציפה כצמצום של הטלה.

רציפות של $h^{-1}:X\to Gr(f)\subset \mathrm{X}\times\mathrm{Y}, x\mapsto (x,f(x))$.

נוכיח רציפות בכל נקודה נתונה $x\in X$. ניקח מלבן פתוח בסיסי $U\times V$ של $h(x)=(x,f(x))$ ב $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$.

בגלל הרציפות של $f:X\to Y$ בנקודה $x\in X$ קיימת סביבה $O\in N(x)$ כך ש $f(O)\subset V$. אזי עבור הסביבה $O\cap U\in N(x)$ מתקיים $f(O\cap U)\subset \mathrm{U}\times\mathrm{V}$.

ב. לא נכון. תרגיל בית 11 שאלה 1ג.

3. א. תנו דוגמה של מרחב טופולוגי X כך ש $X\in T_2$ אבל $X\notin T_3$.

ב. תארו את המסלולים בפעולה טבעית הבאה $G\times X\to X$ כאשר $X=[1,4)\cup(5,6)$ והחבורה היא חבורת הומיאומורפיזמים $G=Homeo(X)$.

<u>פתרון</u>: א. תרגיל בית 7 שאלה 5א.

ב. התאור -- יש 3 מסלולים והם: $\{1\}$ $(1,4)$ $(5,6)$.

שימו לב: 1 היא נקודה יחידה עם התכונה שאם מורידים אותה מהמרחב מתקבל מרחב עם 2 מרכיבי קשירות בלבד. לכן לכל הומאומורפיזם $\mathrm{h}:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ מתקיים $\mathrm{h}(1)=1$ (ז"א 1 היא נקודת שבת לגבי הפעולה).

$X=[1,4)\cup(5,6)$ זה פירוק טופולוגי יחיד של X. לכל $h\in Homeo(X)$ מתקיים $\mathrm{h}(1)=1\in h[1,4)$.

לכן $\mathrm{h}[1,4)=[1,4),$ אז גם $\mathrm{h}(5,6)=(5,6)$.

מצד שני לכל זוג $\mathrm{x},\mathrm{y}\in(5,6)$ קיים $h\in Homeo(X)$ כך ש $\mathrm{h}(x)=y$

(אפשר לבנות בקלות פונקציות $h\in Homeo(X)$ לינאריות למקוטעין).

באופן דומה: לכל זוג $\mathrm{x},\mathrm{y}\in(1,4)$ קיים $h\in Homeo(X)$ כך ש $\mathrm{h}(x)=y$.

4. נניח $X=(\mathbb{R},\tau_s)$ הוא קו Sorgenfrey. הוכיחו:

א. אם $f:X\to Y$ שומרת על סדרות מתכנסות אז f רציפה.

ב. מישור Sorgenfrey X^2 הוא ספרבילי ומכיל תת מרחב טופולוגי $Y\subset X^2$ לא ספרבילי.

ג. $X\in T_{3\frac{1}{2}}$ אבל לא מטריזבילי.

פתרון: א. $(\mathbb{R},\tau_s)\in \mathrm{B}_1$ הוא מרחב בעל תכונת מנייה ראשונה ($\{[x,x+\frac{1}{n})\}$ בסיס לוקלי בנקודה x).

כמו שהוכחנו בהרצאה עבור מרחבים B_1 יש הכללת עקרון Heine.

ב. $\mathrm{cl}(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})=(\mathbb{R},\tau_s)\times(\mathbb{R},\tau_s)$. לכן X^2 הוא ספרבילי.

תת מרחב $Y:=\{(x,-x)\,|\,\mathrm{x}\in\mathbb{R}\}\subset \mathrm{X}^2$ הוא דיסקרטי (כמו שהסברנו בהרצאה) וכמובן לא בת מנייה. לכן Y לא ספרבילי.

ג. המרחב $(\mathbb{R},\tau_s)$ הוא בעל ממד 0 (הקבוצות הבסיסיות $[a,b)$ הן סגוחות ב $(\mathbb{R},\tau_s)$.

הוכחנו בהרצאה שכל מרחב T_1 בעל ממד 0 הוא $T_{3\frac{1}{2}}$.

אם נניח בשלילה ש $(\mathbb{R},\tau_s)$ הוא מטריזבילי אז גם $(\mathbb{R},\tau_s)\times(\mathbb{R},\tau_s)$. במרחבים מטריים ספרביליות היא תכונה תורשתית. אבל אז מתקבלת סתירה עם סעיף ב.

5. הוכיחו או הפריכו:

א. $T\cong H$ (T,H כתת מרחבים של $\mathbb{R}^2$).

ב. קיימת פונקציה רציפה $f:[2016,\infty)\to S$ על מעגל יחידה S כך שהיא לא העתקת מנה.

פתרון: א. מספר נקודות "לא מחלקות" (נקודות קצה) נשמר ע"י הומאומורפיזמים. שימו לב שלמרחבים נתונים יש מספר שונה של נקודות קצה 3 מול 4 בכתיב פשוט של האותיות (או 4 מול 8 בכתיב מקושט עם קווים נוספים בקצוות).

ב. שימוש בתרגיל בית 12 שאלה 3ב (= תהי $f:X\to Y$ העתקת מנה. הוכיחו כי f הומיאומורפיזם $\Leftrightarrow$ f חח"ע). מכאן מספיק למצוא פונקציה רציפה חח"ע על $f:[2016,\infty)\to S$ כך שהיא לא הומאומורפיזם. על דוגמה דומה דיברנו בהרצאות עבור $[0,1)\to S,\ f(t):=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$.

זאת שאלה שקולה משום ש $[0,1)\cong[2016,\infty)$ (מיון קטעים... $[0,1)\cong[0,\frac{\pi}{2})$ -- פונקציה לינארית, $[0,\frac{\pi}{2})\cong[0,\infty)$ פונקצית tg, $[0,\infty)\cong[2016,\infty)$ -- הזזה)

שאלת בונוס (5 נקודות): הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. X מרחב מטריזבילי קומפקטי עם מימד 0.

ב. X הומיאומורפי לתת מרחב סגור של קבוצת קנטור.

פתרון: קבוצת קנטור $K=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}K_n\subset[0,1]$ מתקבלת כחיתוך (בן מנייה) של סדרת קבוצות סגורות K_n ב $[0,1]$. לכן K סגור ב $[0,1]$. בפרט K קומפקטי. כל תת קבוצה סגורה ב K הוא גם קומפקטי.

ע"פ ההרצאות קבוצת קנטור $K\subset[0,1]$ הומיאומורפית למרחב (קנטור) $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ של סדרות בינריות לפי טופולוגית המכפלה (או לפי אולטרה-מטריקה מסוימת).
למדנו שמכפלה של מרחבים ממד 0 גם מרחב בעל ממד 0. ממד 0 היא תכונה תורשתית.
לכן כל תת קבוצה סגורה של K גם קומפקטי מטריזבילי ובעל ממד 0. זה מוכיח ב $\Leftarrow$ א.

א $\Leftarrow$ב. נניח X מרחב מטריזבילי קומפקטי עם מימד 0. בפרט יש לו בסיס בן מנייה שמורכב מקבוצות סגוחות $\{A_n\}$. אז פונקציות רציפות $f_n : X\to\{0,1\}, \mathrm{f}_n(\mathrm{A})=1, \mathrm{f}_n(X\setminus A_n)=0$ מפרידות נקודות של X. לכן פונקציה טבעית הבאה היא חח"ע ורציפה
$f: X\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathrm{f}(\mathrm{x})=(\mathrm{f}_1(x), \mathrm{f}_2(\mathrm{x}),\cdots)$. לפי משפט השיכון f שיכון טופולוגי ו $\mathrm{f}(X)$ תת קבוצה סגורה במרחב קנטור $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ שהומאומורפי ל X.