תרגיל: תהי $A\in R^{10\times10}$. נתון $A^2=I$, $trace(A)=6$.

מצאו את הפ"א ואת הפ"מ של A .

A מאפסת את הפולינום $Q(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$ לפי הנתון הראשון. לכן, לפי משפט, $m_A(x)|Q$ ומכאן שיש שלוש אפשרויות שונות ל m_A : $m_A=(x+1)(x-1)$ או $m_A=x+1$ או $m_A=x-1$.

אם $m_A=x-1$ אז: A **מאפסת את הפולינום המינימלי לפי הגדרה, ולכן**

$$trace(A)=1+1+1+...+1=10 \Leftarrow A=I=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\Leftarrow A-I=0\Leftarrow m_A(A)=0$$

$m_A=$ וזו סתירה לנתון השני.

אם $m_A=x+1$ אז: בדומה $A=-I$, מתקיים $trace(A)=-10$, וגם זו סתירה.

לכן נשאר להסיק ש $m_A(x)=(x-1)(x+1)$. אנו יודעים שכל גורם ליניארי של m_A הוא גורם ליניארי של P_A וגם ההפך נכון (לפי משפט), לכן $p_A(x)=(x-1)^k(x+1)^l$ עבור k,l כלשהם.

כעת, מכיוון שהפ"א מתפרק לגורמים לינאריים, נוכל להסיק ש $trace(A)$ הוא סכום הע"ע של A (גם זה לפי משפט). מכיוון שהע"ע של A הם ±1 (שורשים של p_A) וסכומם (לפי הר"א) הוא 6 , הר"א של 1 הוא 8 והר"א של -1 הוא 2 (אין אפשרות אחרת).

נסיק ש $p_A(x)=(x-1)^8(x+1)^2$.