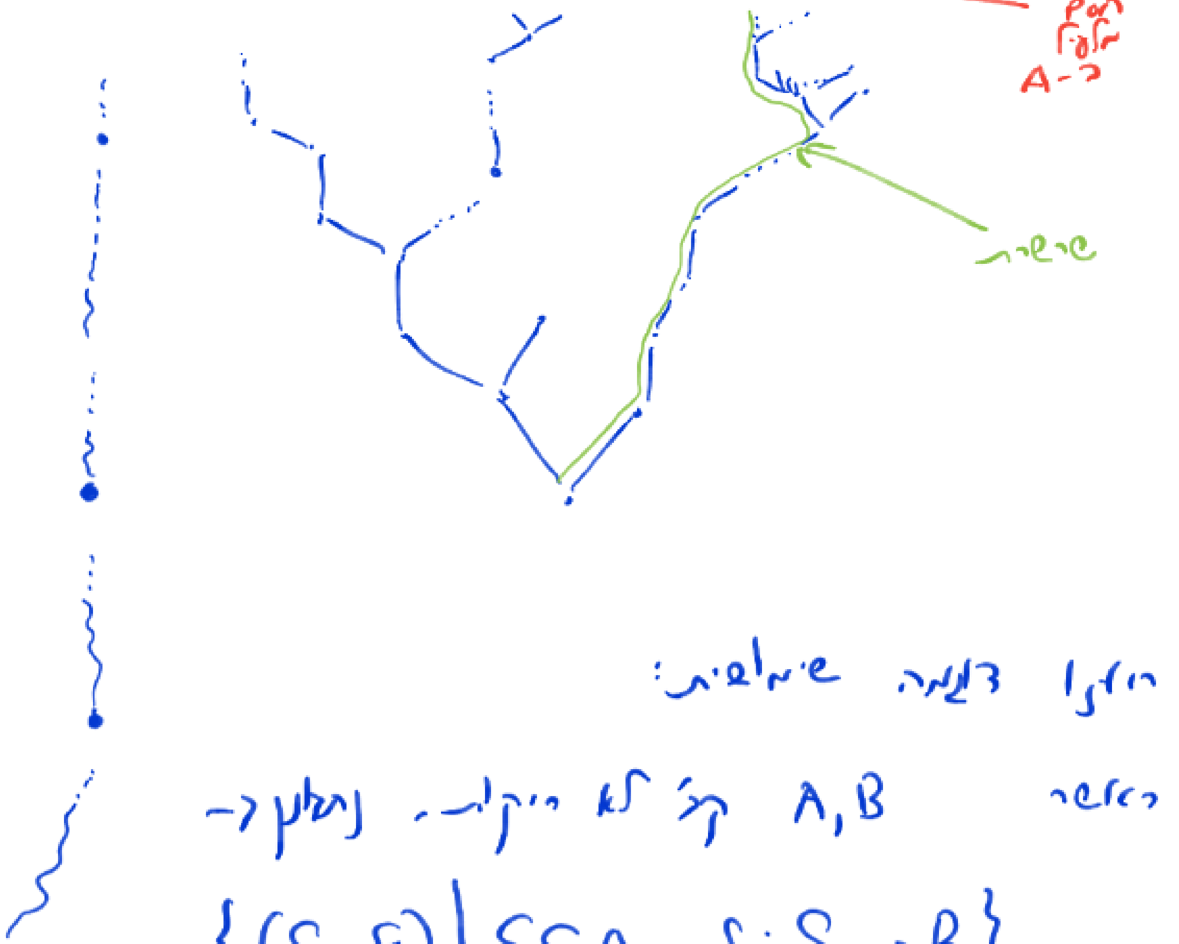
הרצאה 12

תזכורת - הלמה של צורן:

$(A,\le)$ קס"ח לא ריקה כך שלכל שרשרת ב-A יש חסם מלעיל (ב-A, לאו דווקא בשרשרת).

אזי, יש ב-A איבר מקסימלי.

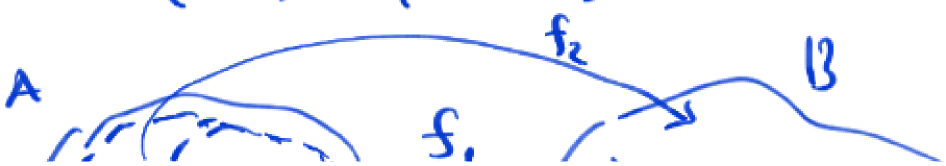
$L\subseteq A$. שרשרת הוא תת סדורה מלא.

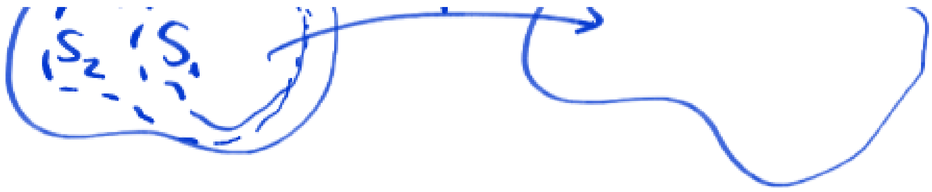


ראינו דוגמה שימושית:

בהינתן A,B קב' לא ריקות. נתבונן ב-

$$\{(S,f) \mid S\subseteq A,\ f:S\to B\}$$





קסיח:

$$(S_1, f_1) \leq (S_2, f_2)$$

כאשר:

$$S_1 \subseteq S_2 , \quad f_2|_{S_1} = f_1$$

ולכן בהינתן שרשרת L של זוגות כאלו,
ניתן להגדיר:

$$\left(\bigcup_{(S,f)\in L} S , \; g \right)$$

$$g : \bigcup_{(S,f)\in L} S \longrightarrow B$$

מוגדר על-פי:

$$g(s) := f(s)$$

$$\begin{cases} s \in S \\ (S,f) \in L \end{cases}$$

וזו מוגדר היטב, מאחר
ש-L שרשרת.

<u>הערה</u> - ייתכנו כמה זוגות (S,f) כך ש- $s\in S$,
אך מאחר ש-L שרשרת, לא משנה איזה
זוג נבחר: נניח -

$$(S_1, f_1) , (S_2, f_2) \in L$$

$$\underset{s}{\ni} \qquad \underset{s}{\ni}$$

L שרשרת $\Longleftarrow$ $S_1 \subseteq S_2$ או $S_2 \subseteq S_1$

$$\Downarrow$$

$f_2|_{S_1} = f_1$ ולכן $f_2(s) = f_1(s)$.

והנ"ל $\left(\bigcup_{(S,f)\in L} S \,,\, g\right)$ מהווה חסם מלעיל ל-L.

<u>הערה:</u> ניתן לומר כי $g = \bigcup_{(S,f)\in L} f$,
כאשר נזכרים כי פונקציה היא תת של מכפלה קרטזית
ולכן ניתן לאחד פונקציות.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

ראינו -שום דבר שעזרה – משפט השוואת עוצמות:

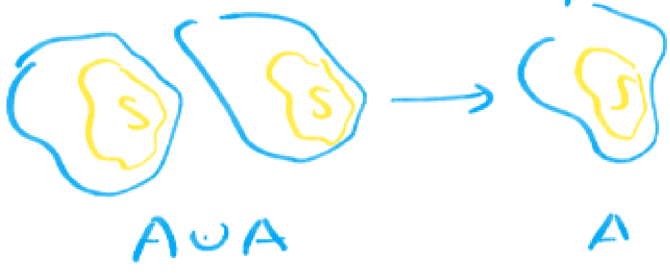
$\forall A,B:$ $|A| \le |B|$ או $|B| \le |A|$.

<u>משפט הסכום:</u> תהי A קב' אינסופית, אזי:

$$|A| + |A| = |A|$$

$$|A \cup A| = |A\times\{0\} \cup A\times\{1\}|$$

<u>רעיון ההוכחה</u> –



נמצא תת קב' $S \subseteq A$ כך ש- $\exists\, f: S \cup S \to S$ חח"ע ועל

נשאר רק למצוא תת מקס' כזו, ואז נראה $|S| = |A|$.

<u>הוכחה:</u>

נגדיר קבוצה:

$$P = \left\{ (S,f) \;\middle|\; \begin{array}{l} S \subseteq A \\ f : \underbrace{S \uplus S}_{\text{איחוד זר}} \to S \end{array} \right\}$$

$$(S_1,f_1) \le (S_2,f_2) \iff S_1 \subseteq S_2 \wedge f_2|_{S_1 \uplus S_1} = f_1$$

* $P \neq \emptyset$: $(\emptyset, \emptyset) \in P$.

* יהי שרשרת $L \subseteq P$. יש חסם מלעיל.

נגדיר:

$$\left(\bigcup_{(S,f)\in L} S \;,\; g \right)$$

כמקודם: $\left(g = \bigcup_{(S,f)\in L} f\right)$

$g(s,0) = f(s,0)$ לכל $(S,f) \in L$ כך ש- $s \in S$

$g(s,1) = f(s,1)$ —"—

כפי שראינו קודם, $\left(\bigcup_{(S,f)\in L} S, g\right)$ חסם מלעיל לשרשרת L.

* g אכן חח"ע ועל. (תרגיל רשות...)

ולכן לפי הלמה של צורן - יש איבר מקסימלי:

$$(B, h) \in P$$

שני מקרים:

(1) $|B| = |A|$. ואז כן:

סימון: $h: B \dot{\cup} B \to B$ חח"ע ועל

$|A|+|A| = |B|+|B| = |B| = |A|$.

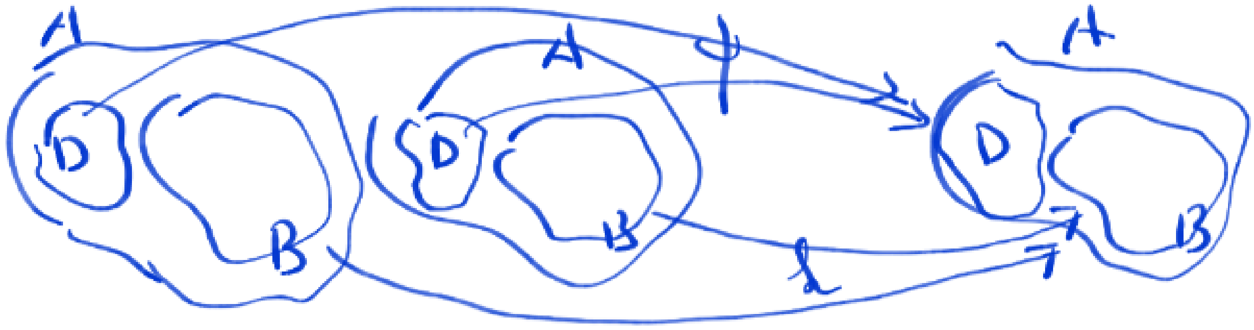
(2) $|B| \lneq |A|$. בפרט, $A \setminus B$ אינסופית.

הראינו שלכל קב' אינסופית יש מונה חח"ע:

$\varphi: \mathbb{N} \to A \setminus B$, נסמן את התמונה $D = \mathrm{Im}\,\varphi$, $|D| = \aleph_0$.

אנו יודעים כי ישנה פונק' חח"ע ועל (למשל, זוגיים ואי-זוגיים):

$$\psi: D \dot{\cup} D \to D$$



$$h: B \dot{\cup} B \to B$$
$$\psi: D \dot{\cup} D \to D$$

נגדיר:

$$\rho: (B \cup D) \dot{\cup} (B \cup D) \to B \cup D$$

(זרות כי $D \subseteq A \setminus B$)

לפי:

$$\rho((b,0)) = h(b,0)$$
$$\rho((b,1)) = h(b,1)$$

$$\rho((d,0)) = \psi(d,0)$$
$$\rho((d,1)) = \psi(d,1)$$

מאחר ש- B,D זרות, ρ מוגדרת היטב ואף חח"ע ועל (נשאיר את כתיבה רשמית עבורכם, להשלים את הפרטים).

נקבל כי $(B,h) \lneq (B\cup D, \rho)$

שכן $B \subsetneq B\cup D$ וכן $\rho|_B = h$.

זאת, בסתירה למקסימליות של (B,h).

מסקנה: $|B|=|A|$ ולכן:

$$|A|+|A| = |B|+|B| \underset{h}{=} |B| = |A|$$

כנדרש.

מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> אם a,b עוצמות אינסופיות אז:

$$a+b = \max\{a,b\}$$

<u>הוכחה:</u> נניח בה"כ $b \le a$ אז:

$$a \le a+b \le a+a = a$$

מכאן ש: $a+b=a$. מ.ש.ל.

<u>משפט המכפלה:</u> תהא X קב' אינסופית. אזי:

$$|X \times X| = |X| .$$

<u>הוכחה:</u> נתבונן בקס"ח:

$$P = \left\{ (S,f) \;\middle|\; \begin{array}{l} S \subseteq X \\ f : S \times S \underset{\text{חח"ע ועל}}{\longrightarrow} S \end{array} \right\}$$

כמקודם, $P \neq \emptyset$.

$$(S_1, f_1) \le (S_2, f_2) \iff S_1 \subseteq S_2 \;\wedge\; f_2|_{S_1 \times S_1} = f_1$$

נראה כי לכל שרשרת קיים חסם עליון.

L שרשרת, נתבונן ב-

$$\left(\bigcup_{(S,f)\in L} S \;,\; g \right)$$

$$g(s,t) = f(s,t)$$

כאשר: $s,t \in S$ כך ש-$(S,f) \in L$

כמו קודם,

$$g : \bigcup_{(S,f)\in L} S \times \bigcup_{(S,f)\in L} S \longrightarrow \bigcup_{(S,f)\in L} S$$

חח"ע ועל

יחיד סוף.

נכונות:

על - יהי: $s \in \bigcup_{(S,f)\in L} S$, עבור $s \in S$

לאיזשהו S כך ש- $(S,f)\in L$. עבורו,

$f: S\times S \to S$ חח"ע ועל

ולכן יש מקור $(u,v)\in S\times S$. מתקיים:

$$g(u,v) = f(u,v) = s.$$

חח"ע - נניח $g(s_1,s_2)=g(s_1',s_2')$, $s_1\in S_1, s_2\in S_2, s_1'\in S_1', s_2'\in S_2'$

- : $(S_1,f_1),(S_2,f_2),(S_1',f_1'),(S_2',f_2')\in L$

L שרשרת לכן בה"כ:

$$(S_1,f_1)\le \underbrace{(S_2,f_2)}\le (S_1',f_1') \le \underbrace{(S_2',f_2')}$$

ולכן:

$$g(s_1,s_2) = f_2(s_1,s_2) = f_2'(s_1,s_2)$$

$$\parallel$$

$$g(s_1',s_2') = f_2'(s_1',s_2')$$

אבל $f_2'(s_1,s_2)=f_2'(s_1',s_2')$ $\Leftarrow$ f_2' חח"ע לכן גם $s_1=s_1'$, $s_2=s_2'$ לכן g חח"ע.

לסיכום, $\left(\bigcup_{(S,f)\in L} S, g\right)$ הוא חסם מלעיל ל-P.

לכן מהלמה של צורן יש איבר מקסימלי:

$(B\subseteq X)$

$(B,h)\in F$

$h: B\times B \to B$ חח"ע ועל

שני מקרים:

(1) $|X\setminus B| \le |B|$: נראה:

$$|B|\le|X| = |X\setminus B| + |B| \le |B|+|B| = |B|$$

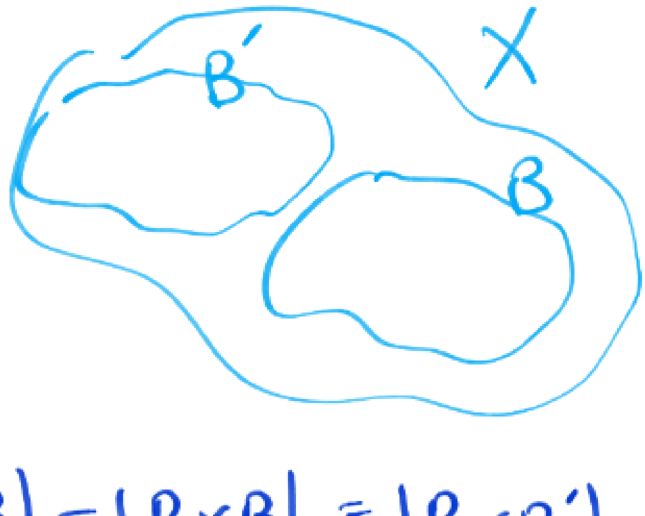
לכן מקבלים ש-: $|X|=|B|$ ולכן:

$$|X\times X| = |B\times B| \underset{h}{=} |B| = |X|$$

(2) $|B| \lneq |X\setminus B|$: כלומר, קיימת $B'\subseteq X\setminus B$

כך ש- $|B'|=|B|$.

(קיימת פונק' חח"ע $B\to X\setminus B$ נסמן תמונתה ב-B'.)



לכן:

$$(*)\begin{cases} |B'| = |B| \underset{h}{=} |B\times B| = |B\times B'| = \\ = |B'\times B| = \\ = |B'\times B'| \end{cases}$$

נבחין כי B,B' זרות. בפרט,

$B\times B'$, $B'\times B$, $B'\times B'$ זרות בזוגות.

מהגדרת הסכום:

$$|B'| = |B'| + |B'| + |B'| =$$

$$\overset{*}{=} |B\times B'| + |B'\times B| + |B'\times B'| =$$

$$= |B\times B' \cup B'\times B \cup B'\times B'|$$

נגדיר את (B,h):

$$(B\cup B',\ \varphi)$$

$$\varphi : (B\cup B')\times(B\cup B') \longrightarrow B\cup B'$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{B\times B}_{h\ \downarrow\ B} \cup \underbrace{B\times B' \cup B'\times B \cup B'\times B'}_{f\ \downarrow\ B'}$$

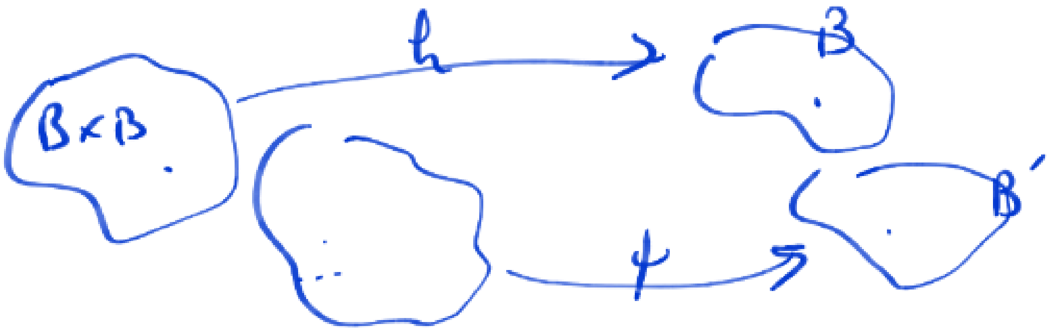
קיימת פונק' חח"ע ועל כזו

מאחר ש-

$$|B'| = |B\times B' \cup B'\times B \cup B'\times B'|$$

מאחר ש- h, f חח"ע ועל, ו- B,B' זרות,

הרי שגם φ חח"ע ועל. (תרגול פונקציות בתרגיל.)



מסקנה: – $(B,h) \lneq (B\cup B', \varphi)$

בסתירה למקס' של (B,h), ולכן אנו חוזרים למקרה הראשון:

$$|B|=|X|$$

$|X\times X|=|X|$, כנדרש.

מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> אם a,b עוצמות אינסופיות אז:

$$a\cdot b=\max\{a,b\}$$

<u>הוכחה:</u> נניח $b\le a$, אז:

$$a\le a\cdot b\le a\cdot a=a$$

לכן מק-ש-ב: $a\cdot b=a$ כנדרש. מ.ש.ל.

10^{55}

<u>הערות/שאלות:</u>

① נניח $a^c=b^c$. האם $a=b$?

לא: $2^{\aleph_0}=3^{\aleph_0}$

- מה אם a,b,c אינסופיות?

$$\aleph_0^{\aleph_0} \le \aleph^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} =$$

$$= 2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0}$$

ולכן: $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0}$ $(\aleph =)$.

(2) אם a אינסופית אז $a^a = 2^a$.

הוכחה:

$$2^a \le a^a \le \left(2^a\right)^a = 2^{a \cdot a} = 2^a$$

ממשפט הכפלה

(3)

$$\boxed{X_A = \{f : A \to A \mid f \text{ חח"ע ועל}\}}$$

$|A| = a$ אינסופית -

מה עוצמת X_A – (תלוי ב-$|A|$)?

$$X_A \subseteq A^A \Rightarrow |X_A| \le a^a = 2^a$$

נראה כי למעשה:

$$|X_A| = 2^a$$

מק-ש-ב מספיק להראות $2^a \le |X_A|$,

נבנה פונק' חח"ע:

$$\varphi : \underbrace{P(A)}_{2^a} \to X_A$$

נשים לב כי אם עולים את A בקבי שקול-עוצמה, נקבל X חדשה שקולת עוצמה ל-X.

אם $\underline{A \sim B}$, אזי:

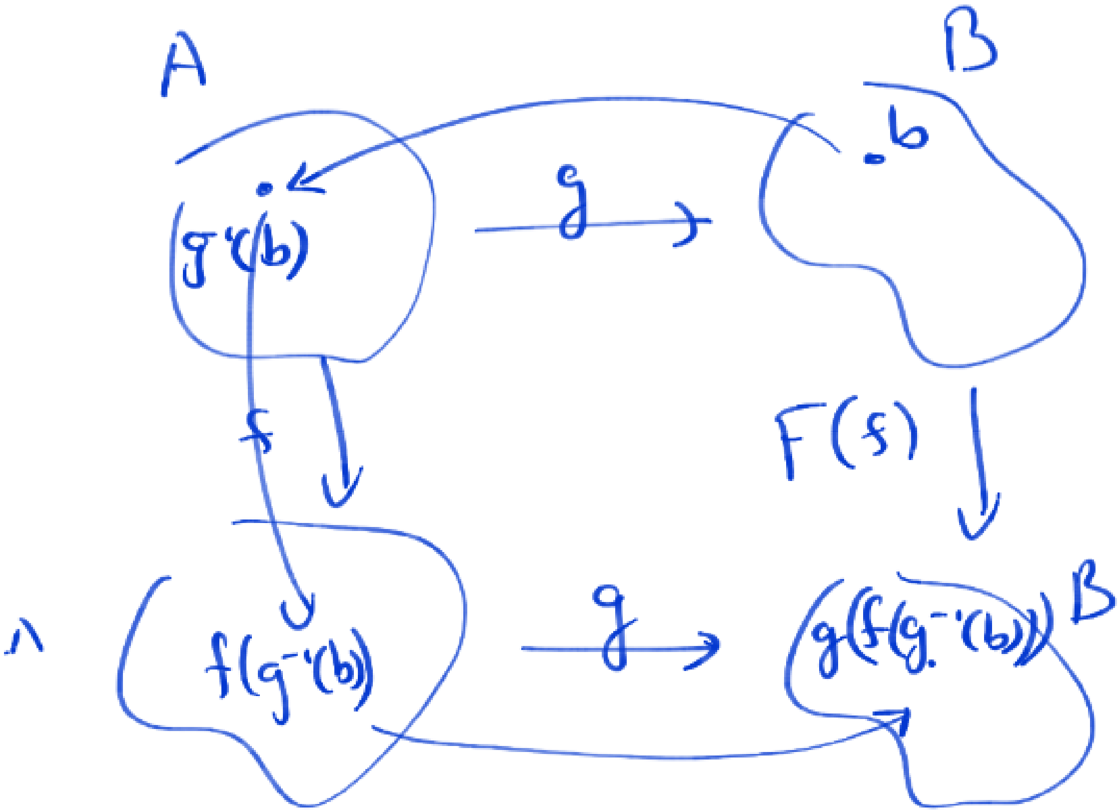
$$\underbrace{\{f:A\to A \mid \text{חח"ע ועל}\}}_{X_A} \sim \underbrace{\{f:B\to B \mid \text{חח"ע ועל}\}}_{X_B}$$

אם $g:A\to B$ חח"ע ועל.

$$F: X_A \longrightarrow X_B$$

$$F(f) = g \circ f \circ g^{-1}$$

אילוסטרציה:



<u>F מוגדרת היטב</u>: [illegible] בהינתן $f \in X_A$,

מתקיים $F(f)\in X_B$.

צ"ל: אם $f:A\to A$ חח"ע ועל אז גם $F(f):B\to B$ חח"ע ועל.

$F(f)=g\circ f\circ g^{-1}$, f חח"ע ועל

y חח"ע ועל, g^{-1} חח"ע ועל

ולכן הרכבתן חח"ע ועל.

<u>F חח"ע ועל</u>:

$$\begin{array}{ccc} F: X_A & \longrightarrow & X_B \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

$f:A\to A$

$F(f):B\to B$

$F: X_A\to X_B$

F חח"ע:
נניח: $F(h_1)=F(h_2)$ עבור $h_1,h_2\in X_A$.

$$g\circ h_1\circ g^{-1} = g\circ h_2\circ g^{-1}$$

נרכיב g^{-1} משמאל:

$$h_1\circ g^{-1} = h_2\circ g^{-1}$$

נרכיב g מימין ונקבל: $h_1=h_2$ כנדרש.

<u>F על</u>: יהי $h:B\to B$ חח"ע ועל, נראה שקיים $\psi:A\to A$ חח"ע ועל:

$(g\circ\psi\circ g^{-1})$ $\quad F(\psi)=h$

ולכן נקח:

$$\psi=g^{-1}\circ h\circ g\in X_A$$

בתרגול הוכחנו, $A\sqcup A\sim A$ ולכן:

$$X_{A\sqcup A}\sim X_A$$

לכן, כדי להראות:

$$2^a\le X_A$$

מספיק למצוא פונק' חח"ע:

$$\rho:\underbrace{P(A)}_{2^a}\longrightarrow\underbrace{X_{A\sqcup A}}_{|X_A|}$$

דוגמה:

צריך להגדיר לכל $S\subseteq A$:

$$\rho(S): A\sqcup A\longrightarrow A\sqcup A$$

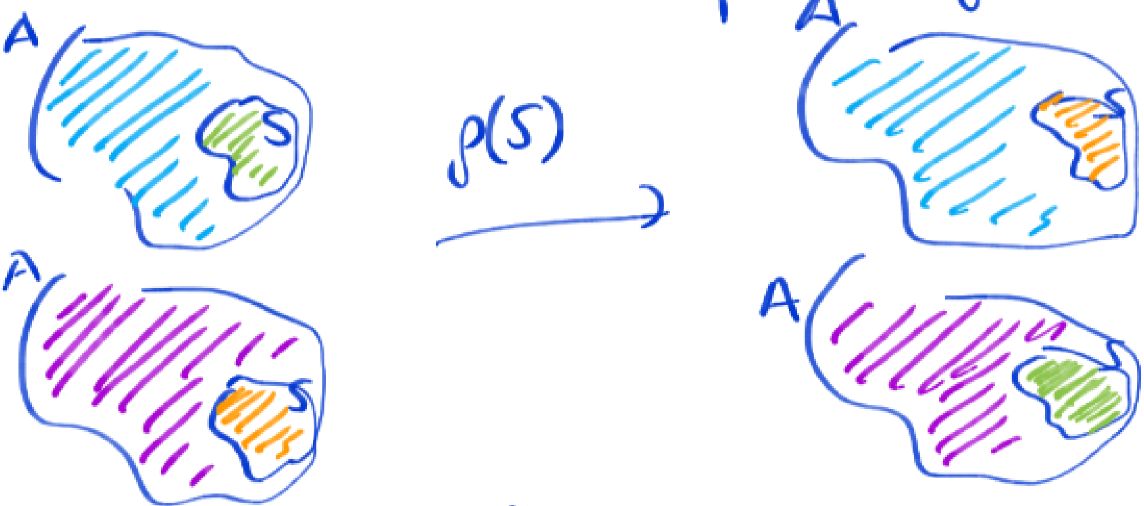
$$(\rho(S))(s,0)=(s,1)$$

$$(\rho(S))(s,1) = (s,0)$$

אם $a \notin S$:

$$(\rho(S))(a,0) = (a,0)$$
$$(\rho(S))(a,1) = (a,1)$$

$\rho(S) \in X_{A \cup A}$ כי אכן חח"ע ועל.



כעת נראה כי ρ חח"ע.

נניח $\rho(S) = \rho(T)$. נראה $S=T$.

יהי $s \in S$, אזי:

$$(\rho(T))_{(s,0)} = (\rho(S))_{(s,0)} = (s,1)$$

לכן בהגדרת $\rho(T)$, פירושו ש- $s \in T$.

באופן דומה מראים כי $T \subseteq S$, לפיכך $S=T$
והפונקציה ρ חח"ע.

לסיכום, קיבלנו:

$\rho : P(A) \longrightarrow X_{A \cup A}$ חח"ע

ועל כן:

$2 = |P(A)| \le |X_{A\cup A}| = |X_A|$

וסה״כ: $|X_A| = 2^{a}$. מ.ש.ל.

④ עוצמה של קב׳ מנה

לקב׳ A ו- R יה״ש נגדיר קב׳ מנה:

$$A/R = \{ [a]_R \mid a \in A \}$$

טענה: תהא K עוצמה ונניח כי לכל יה״ש, $[a]_R \le K$ אזי:

$$|A| \le |A/R| \cdot K$$

הוכחה: נזכר כי $A = \bigcup_{[a]_R \in A/R} [a]_R$

תהא K קב׳ מעוצמה K. נגדיר פונק׳ חח״ע:

$$\varphi : A \to A/R \times K$$

נזכר כי לכל יה״ש, $[a]_R \le K$ ולכן לכל יה״ש קיימת פונק׳ חח״ע:

$$g_{[a]_R} : [a]_R \to K$$

R

נגדיר:

$$\varphi(a) = \left([a]_R , g_{[a]_R}(a) \right)$$

מדוע φ חח"ע?

נניח $\varphi(a)=\varphi(b)$. נובע כי $[a]_R=[b]_R$

וכן:

$$\underbrace{g_{[a]_R}}(a) = g_{[b]_R}(b) = \underbrace{g_{[a]_R}}(b)$$

כי $g_{[a]_R}$ לקחנו כפונ' חח"ע, אז כן:

$a=b$ כנדרש.

סה"כ: קיבלנו פונק' φ חח"ע:

$$\varphi : A \to A/R \times K$$

ולכן:

$$|A| \le |A/R| \cdot K .$$

מ.ש.ל.

(5) על $P(\mathbb{N})$ נגדיר יח"ש לפי:

$$S \sim T \iff |S \triangle T| < \infty$$

מה עוצמת קב' המנה $P(\mathbb{N})/\sim$?

$\sim$ יח"ש:

* רפלקסיבי
* סימטרי. } קל.
* טרנז׳:

$|S\triangle T|<\infty$

$|T\triangle W|<\infty$

סופיים $S\setminus T,\ T\setminus S$

סופיים $T\setminus W,\ W\setminus T$

$$\underbrace{(S\setminus T)}_{\text{סופי}}\cup\underbrace{(T\setminus W)}_{\text{סופי}}\supseteq\underbrace{S\setminus W}_{\text{סופי}}$$

ובדומה: $W\setminus S$ סופי, ולכן $|S\triangle W|<\infty$.

הערה: $\underbrace{(S\triangle T)}_{\text{סופי}}\triangle\underbrace{(T\triangle W)}_{\text{סופי}}=S\triangle W$

זוהי הוכחה קצרה יותר.

נעבור לחישוב $|P(\mathbb{N})/\sim|$.

$|P(\mathbb{N})/\sim|\le\aleph$

נגדיר פונקציה:

$$f: P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N})/_\sim$$

$$f(S) = [S]_\sim$$

ולכן: $|P(\mathbb{N})| = \aleph \leq |P(\mathbb{N})/_\sim|$.

נחסום את עוצמת מחלקות השקילות.
תהי $S \in P(\mathbb{N})$.

$$|[S]_\sim| = ?$$

$$[S]_\sim = \{T \subseteq \mathbb{N} \mid \exists \underbrace{F}_{\text{סופית}} \subseteq \mathbb{N} : S \triangle T = F\}$$

קיימת פונקציה חח"ע:

$$g: [S]_\sim \longrightarrow \{\text{תתי הקבוצות הסופיות של } \mathbb{N}\}$$

$$g(T) = S \triangle T \quad (=F)$$

חח"ע כי

$$g(T_1) = g(T_2) \Rightarrow S \triangle T_1 = S \triangle T_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{S \triangle S}_{\phi} \triangle T_1 = \underbrace{S \triangle S}_{\phi} \triangle T_2 \Rightarrow T_1 = T_2$$

מסקנה: $|[S]_\sim| \leq \aleph_0$.

כלומר נקבל כי $\left|P(\mathbb{N})/\sim\right| = \aleph$.

$$\aleph = |P(\mathbb{N})| \underset{\text{מהטענה הקודמת}}{\leq} \underbrace{\left|P(\mathbb{N})/\sim\right|}_{\text{חסום מלמעלה כל עוצמה... כל מחה"ש}} \cdot \aleph_0 = \max\left\{\left|P(\mathbb{N})/\sim\right|, \aleph_0\right\}$$

$\aleph \nleq \aleph_0$ ולכן נניח:

$$\aleph \leq \left|P(\mathbb{N})/\sim\right|$$

מק-ש-ב: $\left|P(\mathbb{N})/\sim\right| = \aleph$.

מ.ש.ל.

<u>הערה:</u> לא תמיד העוצמה של כל מחה"ש שוות זו לזו.

<u>דוגמה:</u> $X = \{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

נגדיר יח"ש R:

$$fRg \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$$

(קל לראות שזה יח"ש.)

$$\bullet\ [id_{\mathbb{N}}]_R = \{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \mid fR\,id_{\mathbb{N}}\} =$$

$$= \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} id_{\mathbb{N}} \} =$$

$$= \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \operatorname{Im} f = \mathbb{N} \} =$$

$$= \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{על } f \}$$

רציונל כי זה $\leq \aleph$, מצד שני:

$$|[id_{\mathbb{N}}]_R| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph .$$

מצד שני, נגדיר פונקציה $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

לכן: $g(n) = 1$

$$[g]_R = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f R g \} =$$

$$= \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g = \{1\} \} =$$

$$= \{1\}^{\mathbb{N}} = \{g\}$$

ועוצמתה 1.

<u>תרגיל אתגר</u>: חשבו את עוצמת הקבוצה:

$$\left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{r} \text{לכל } r \in \mathbb{R} \text{ קיים קטע פתוח} \\ f(r) \in (a,b) \\ \text{כך ש-} \; f^{-1}[(a,b)] = \{r\} \end{array} \right\}$$