מועד א' – אנליזה מתקדמת ומד"ר – 15/07/19

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $(0,0)$

א. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

ב. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

2. מצא את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $f(x,y) = \frac{x^2(y+1)}{2}$

בתחום $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

נחפש נקודות חשודות בפנים התחום, ונקודות חשודות על השפה.

בפנים התחום אנחנו מחפשים נקודות בהן הגרדיאנט מתאפס

$$f_x = 0$$

$$f_y = 0$$

$$f_x = x(y+1) = 0$$

$$f_y = \frac{x^2}{2} = 0$$

כל הנקודות בהן $x = 0$ חשודות.

זה מחשיד כי באינסוף נקודות במעגל היחידה $x = 0$.

בואו ננסה ולא נפחד

$$f(0,y) = 0$$

אמנם קיבלנו אינסוף נקודות חשודות, אך הגובה בכולן זהה, ואין בעייה להציב.

(הערת אגב: גם אם היינו מקבלים ביטוי שתלוי בy היינו יכולים למצוא את המקסימום והמינימום שלו)

כעת נעבור למצוא את הנקודות החשודות על השפה

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

משוואות כופלי לגראנז'

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

$$g = 0$$

נציב

$$x(y+1) = \lambda 2x$$

$$\frac{x^2}{2} = \lambda 2y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

נוציא גורם משותף ולא נצמצם, גם בתיכון, כי צמצום לעיתים קרובות גורם לשכוח אם הביטוי הוא אפס או לא

$$x(y+1-2\lambda) = 0$$

אם $x = 0$ נציב בשלושת המשוואות

$$0 = 0$$

$$0 = 2\lambda y$$

$$y^2 = 1$$

לכן $y = \pm 1$ ולכן $\lambda = 0$ מצאנו נקודות שמקיימות את כל המשוואות, הערך של λ לא באמת מעניין אותנו רק העובדה שהוא קיין ועובד בכל המשוואות במקביל.

$$(0,1), (0,-1)$$

(במקרה הזה, זה היה קצת מיותר כי ידענו שכל הנקודות בהן $x = 0$ חשודות כי הגרדיאנט התאפס).

אחרת, אם $x \neq 0$, מתקיים כי

$$y + 1 - 2\lambda = 0$$

$$y = 2\lambda - 1$$

נציב במשוואה השנייה

$$\frac{x^2}{2} = 2\lambda(2\lambda - 1)$$

$$x^2 = 4\lambda(2\lambda - 1)$$

נציב הכל במשוואה השלישית

$$4\lambda(2\lambda - 1) + (2\lambda - 1)^2 = 1$$

$$8\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 1$$

$$12\lambda^2 - 8\lambda = 0$$

$$\lambda(12\lambda - 8) = 0$$

יש שני פתרונות

$$\lambda = 0, \frac{2}{3}$$

נקבל בהתאם כי

$$y = -1, \frac{1}{3}$$

מהמשוואה השלישית

אם $y = -1$ אז $x = 0$

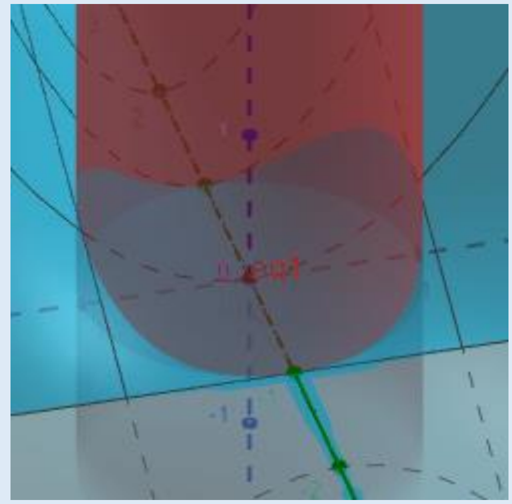
אם $y = \frac{1}{3}$ אז $x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$

צריך לוודא שכל שלושת המשוואות מתקיימות ע"י הצבה של השלישיות.

נציב את כל החשודות בפונקציה, כאשר את הנקודות בהן $x = 0$ כבר הצבנו על מנת לא לפחד בהתחלה (והגובה שם הוא אפס)

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{8}{9}}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{8}{9}\left(\frac{1}{3} + 1\right)}{2} = \frac{16}{27}$$

הערך המקסימלי של הפונקציה בתחום הוא $\frac{16}{27}$ והערך המינימלי הוא 0



3. מצאו פתרון למד"ר $\frac{y'}{1+y^2} = 1$ המקיים $y(0) = 0$.

זו מד"ר פרידה והיא כבר אפילו מופרדת

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int 1dx$$

$$\arctan(y) = x + C$$

$$y = \tan(x + C)$$

נציב את תנאי ההתחלה

$$y(0) = \tan(0 + C) = 0$$

$$C = 0$$

$$y = \tan(x)$$

4. מצאו פתרון למד"ר $(x + e^x)y' = 1 - y - ye^x$ המקיים $y(1) = 0$.

ראשית נזהה שמדובר במד"ר מסדר ראשון

אפשר להציג את המד"ר כלינארית

$$(x + e^x)y' = 1 - (1 + e^x)y$$

$$y' + \frac{1+e^x}{x+e^x} y = \frac{1}{x+e^x}$$

$$p = \frac{1+e^x}{x+e^x}$$

$$q = \frac{1}{x+e^x}$$

$$P = \int p = \ln|x+e^x|$$

הפתרון למד"ר נתון ע"י הנוסחא הבאה

$$y = e^{-\ln|x+e^x|}\left(C + \int \frac{1}{x+e^x} e^{\ln|x+e^x|} dx\right)$$

$$e^{-\ln|x+e^x|} = \frac{1}{|x+e^x|}$$

$$y = \frac{1}{|x+e^x|} \cdot \left(C + \int \frac{|x+e^x|}{x+e^x} dx\right)$$

כיוון שכך או כך הסימנים של הערך המוחלט יבטלו זה את זה, אפשר להפטר ממנו.

את הקבוע לא מעניין הסימן ממילא.

$$y = \frac{1}{x+e^x}\left(C + \int 1 dx\right) = \frac{C+x}{x+e^x}$$

$$y(1) = \frac{C+1}{1+e} = 0$$

לכן $C = -1$

$$\frac{x-1}{x+e^x}$$

נפתור גם כמדוייקת:

$$(x+e^x)dy = \left(1 - y(1+e^x)\right)dx$$

$$-\left(1 - y(1+e^x)\right)dx + (x+e^x)dy = 0$$

את המקדם של dx נגזור לפי y ואת המקדם של dy נגזור לפי x ונקווה שנקבל אותו הדבר

$$1 + e^x = 1 + e^x$$

נעשה אינטגרל לאחד המקדמים לפי המשתנה שלו (ההפך מהנגזרת)

$$U = \int (x + e^x)dy + c(x) = (x + e^x)y + c(x)$$

גוזרים לפי המשתנה השני

$$U_x = (1 + e^x)y + c'(x) = -\big(1 - y(1 + e^x)\big)$$

$$c'(x) = -1$$

$$c(x) = -x$$

קיבלנו עד כה

$$U = (x + e^x)y - x$$

הפתרון נתון באופן סתום ע"י

$$(x + e^x)y - x = C$$

נציב ש $y(1) = 0$ כלומר במקום x נציב 1 ובמקום y נציב 0

$$-1 = C$$

$$(x + e^x)y = x - 1$$

$$y = \frac{x - 1}{x + e^x}$$

5. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 2y' + y = e^x$ המקיים $y(0) = y'(0) = 0$.

(פתרתי עבור מקרה קצת קל יותר מאשר זה שהיה במבחן)

ראשית מדובר במד"ר לינארית מסדר גבוה עם מקדמים קבועים

אז נמצא את הפולינום האופייני של המשוואה ההומוגנית

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$$

לכן הפתרון הכללי להומוגנית הוא

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

עכשיו נותר למצוא פתרון פרטי ללא הומוגנית.

מה ננחש?

המספר המתאים לe^x הוא 1 (הרי ההתאמה שלנו היא $a \pm bi \to e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\sin(bx)$), האם הוא שורש של הפולינום האופייני? כן, מסדר 2

לכן הניחוש שלנו הוא

$$y_p = x^2 c_3 e^x$$

לאחר שאנחנו יודעים מהי צורת הניחוש? מציבים אותו במד"ר

$$y_p' = c_3 2xe^x + c_3 x^2 e^x = c_3 e^x (x^2 + 2x)$$

$$y_p'' = c_3 e^x (x^2 + 2x) + c_3 e^x (2x + 2) = c_3 e^x (x^2 + 4x + 2)$$

נציב במד"ר

$$c_3 e^x (x^2 + 4x + 2 - 2(x^2 + 2x) + x^2) = e^x$$

$$2c_3 = 1$$

$$c_3 = \frac{1}{2}$$

הפתרון הפרטי שלנו הוא

$$y_p = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

סה"כ הפתרון הכללי למד"ר

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$$

נציב את תנאי ההתחלה

$$y(0) = c_1 = 0$$

ולכן

$$y = e^x \left(c_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right)$$

נגזור

$$y' = e^x \left(c_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right) + e^x (c_2 + x)$$

נציב

$$y'(0) = c_2 = 0$$

ולכן סה"כ הפתרון המלא לשאלה הוא

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^x$$