88113, אוניברסיטת בר-אילן
סמסטר ב' (מועד א'), תשע"ד

אלגברה לינארית 2 (88113) – בחינת סיום (מועד א')
פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה!

1.
א. הגדירו: גרעין ותמונה (של העתקה לינארית).
ב. יהי $T_1 : V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $T_1^2 = T_1$. נגדיר: $T_2 := I_V - T_1$. הוכיחו: $T_2{}^2 = T_2$.
ג. בסימוני הסעיף הקודם הוכיחו: $V = \operatorname{im} T_1 \oplus \operatorname{im} T_2$.

2.
א. הגדירו: פולינום אופייני, פולינום מינימלי (של מטריצה).
ב. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

כאשר $a,b,c \in \mathbb{R}$. מצאו את הפולינום המינימלי של A; חלקו למקרים לפי הצורך.

3. תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ מטריצה עם פולינום מינימלי $m_A(x) = x^3 - 2x^2$.
א. מצאו את הערכים העצמיים של A, כולל ריבוי; רשמו את כל האפשרויות.
ב. מהי צורת ז'ורדן של A? רשמו את כל האפשרויות.
ג. הוכיחו: המטריצה A אינה סימטרית.

4.
א. הגדירו: אורך (נורמה) של וקטור, זווית בין וקטורים (ציינו מתי מושגים אלו מוגדרים).
ב. הוכיחו שבכל מרחב מכפלה פנימית V (מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$) מתקיימת הזהות

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$$

והסבירו מדוע זהות זו נקראת גם "זהות המקבילית".
ג. נגדיר ב-$\mathbb{R}^2$:

$$\|(x,y)\| := |x| + |y| \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R})$$

הוכיחו: $\|\cdot\|$ אינה מתקבלת ממכפלה פנימית כלשהי על $\mathbb{R}^2$.

5.
א. הגדירו: אופרטור אוניטרי, אופרטור הרמיטי.
ב. הוכיחו: אם T, S אופרטורים אוניטריים אז גם ST אופרטור אוניטרי.
ג. הוכיחו: אם T, S אופרטורים הרמיטיים אז: ST הרמיטי $\Leftrightarrow$ $ST = TS$.