תורת החבורות 88-218-01 תשפ"א
הערות הרצאה 8

0.1 חבורות של העתקות

בהנתן הומומורפיזם $f : G \to H$, אז לכל תת־חבורה נורמלית $G \rhd N$ אם $N \subseteq \ker f$, הוא משרה הומומורפיזם

$$\begin{aligned}\overline{f}\colon G/N &\to H\\ gN &\mapsto f(g)\end{aligned}$$

כשראינו את התרשים החילופי:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\
& G/N \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

הגדרה 0.1. תהינה G, H חבורות. אז נסמן את הקבוצה של ההומומורפיזמים מ-G ל-H בסימון

$$\mathrm{Hom}(G,H) \coloneqq \{\varphi\colon G \to H \,|\, \text{הומומורפיזם } \varphi\}$$

הערה 0.2. הקבוצה הזו אף פעם לא ריקה, יש שם את ההומומורפיזם הטריוויאלי

$$\begin{aligned}\mathrm{triv}\colon G &\to H\\ g &\mapsto e_H\end{aligned}$$

דוגמה 0.3. תהי H חבורה כלשהי. אז יש התאמה חח"ע ועל

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},H) &\longleftrightarrow H\\ \varphi &\mapsto \varphi(1)\\ (x \mapsto h^x) &\mapsfrom h\end{aligned}$$

נזכר כי $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ולכן יש התאמה חח"ע ועל

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n,H) \longleftrightarrow \{\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},H) \,|\, n\mathbb{Z} \leq \ker\varphi\} \longleftrightarrow \{\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},H) \,|\, n \in \ker\varphi\}$$

יהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, H)$. נניח $h = \varphi(1)$, ולכן $\varphi(x) = h^x$. מתי $n \in \ker\varphi$? בדיוק כאשר $h^n = e_H$. לכן יש התאמה חח"ע ועל

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_n, H) \longleftrightarrow \{h \in H \mid h^n = e_H\}$$

וראינו $h^n = e$ אם ורק אם $o(h)|n$.

תרגיל 0.4. מצאו את $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6)$.

פתרון. מחפשים איברים ב-$\mathbb{Z}_6$ שהסדר שלהם מחלק את 4. מצד שני כל הומומורפיזם מ-$\mathbb{Z}_4$ ל-$\mathbb{Z}_6$ נקבע לפי התמונה של 1. נקבל כי

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6) = \{\mathrm{triv}, f_3\}$$

שבו $f_3(1) = 3$ ו-$\mathrm{triv}(1) = 0$.

$$f_3(2) = 0, f_3(3) = 3$$

טענה 0.5. יהיו A, B חבורות אבליות. אז $\operatorname{Hom}(A, B)$ היא חבורה אבלית ביחס לפעולה של "כפל נקודתי":

$$(\varphi \cdot \psi)(a) \coloneqq \varphi(a)\psi(a)$$

הוכחה. לבית. לא קשה לראות ש-triv הוא איבר היחידה. $\square$

טענה 0.6. יהיו A_1, A_2, B_1, B_2 חבורות אבליות. אז

$$\begin{gathered}
\operatorname{Hom}(A_1 \times A_2, B_1) \cong \operatorname{Hom}(A_1, B_1) \times \operatorname{Hom}(A_2, B_1) \\
\varphi \mapsto (\varphi \circ \pi_1, \varphi \circ \pi_2) \\
\varphi(a_1, a_2) \mapsto (\varphi(\pi_1(a_1)), \varphi(\pi_2(a_2))) \\
\operatorname{Hom}(A_1, B_1 \times B_2) \cong \operatorname{Hom}(A_1, B_1) \times \operatorname{Hom}(A_1, B_2) \\
\varphi \mapsto (\rho_1 \circ \varphi, \rho_2 \circ \varphi)
\end{gathered}$$

כאשר

$$\begin{aligned}
\pi_1 \colon A_1 &\to A_1 \times A_2 \\
a &\mapsto (a, e_{A_2}) \\
\pi_2 \colon A_2 &\to A_1 \times A_2 \\
a &\mapsto (e_{A_1}, a)
\end{aligned}$$

וגם $\rho_i \colon B_1 \times B_2 \to B_i$ מוגדר כמו שמצפים

דוגמה 0.7. זה עובד גם עם חבורות אינסופיות

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^m) \cong M_{n\times m}(\mathbb{Z})$$

כאשר $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ עם n עותקים.

0.2 אוטומורפיזמים

הערה 0.8. כאשר G, H לא אבליות, אז $\mathrm{Hom}(G, H)$ היא לא בהכרח חבורה לגבי הפעולה של כפל נקודתי. אם זוכרים שאפשר להרכיב פונקציות, אז כנראה כדאי לדבר על $\mathrm{Hom}(G, G)$. קל לראות ש-$\mathrm{Hom}(G, G)$ היא מונואיד לגבי הרכבת פונקציות, ואיבר היחידה הוא העתקת הזהות id_G.

הגדרה 0.9. תהי G חבורה. איזומורפיזם $f\colon G \to G$ נקרא אוטומורפיזם של G. חבורת ההפיכים של $\mathrm{Hom}(G, G)$ לגבי הרכבה נקראת חבורת האוטומורפיזמים של G, ומסומנת

$$\mathrm{Aut}(G) := U(\mathrm{Hom}(G, G), \circ)$$

הערה 0.10. קל לראות כי $\mathrm{Aut}(G) \leq S_G$. חבורת האוטומורפיזמים $\mathrm{Aut}(G)$ פועלת על G לפי

$$\varphi * x = \varphi(x)$$

דוגמה 0.11. נמצא את $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$. כבר ראינו שיש ל-$\mathbb{Z}$ בדיוק שני יוצרים

$$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$$

כל הומומורפיזם φ מ-$\mathbb{Z}$ ל-$\mathbb{Z}$ נקבע לפי $\varphi(1)$, וכדי ש-φ יהיה אוטומורפיזם חייבים לשלוח יוצר ליוצר. מתברר ששליחת 1 לכל אחד משני היוצרים משרה אוטומורפיזם. לכן

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{id}_G, \psi\} \cong \mathbb{Z}_2$$

שבו $\psi(1) = -1$ ולכן $\psi(x) = -x$.

דוגמה 0.12. כעת נראה מי זו חבורת האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}_n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) &\cong U_n \\ \varphi &\mapsto \varphi(1) \end{aligned}$$

לכל $a \in U_n$ הפונקציה

$$\begin{aligned} \varphi_a\colon \mathbb{Z}_n &\to \mathbb{Z}_n \\ \varphi(1) &\mapsto a \end{aligned}$$

היא אוטומורפיזם שבו

$$\varphi_a(m) = \varphi_a(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m}) = \varphi_a(1) + \cdots + \varphi_a(1) = am$$

ולכן עבור φ_a ו-φ_b מתקיים

$$(\varphi_a \circ \varphi_b)(1) = \varphi_a(\varphi_b(1)) = \varphi_a(b) = ab = \varphi_a(1) \cdot \varphi_b(1)$$

תרגיל 0.13. תהי G חבורה, לא בהכרח אבלית. יהי $g \in G$ קבוע ונתאים לו את הפונקציה $\gamma_g \colon G \to G$ המוגדרת לפי $\gamma_g(x) = gxg^{-1}$. לבית: הוכיחו כי $\gamma_g \in \mathrm{Aut}(G)$.

הגדרה 0.14. אוטומורפיזם מהצורה של γ_g נקרא אוטומורפיזם פנימי. נגדיר את הקבוצה

$$\mathrm{Inn}(G) = \{\gamma_g \,|\, g \in G\} \lhd \mathrm{Aut}(G)$$

שהיא חבורת האוטומורפיזמים הפנימיים של G.

הראו כי $\gamma_g = \mathrm{id}_G$ אם ורק אם $g \in Z(G)$. אם מראים

$$\gamma_g \circ \gamma_h = \gamma_{gh}, \qquad (\gamma_g)^{-1} = \gamma_{g^{-1}}$$

תרגיל 0.15. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} \Phi \colon G &\to \mathrm{Aut}(G) \\ g &\mapsto \gamma_g \end{aligned}$$

הראו שזהו הומומורפיזם.

הערה 0.16. מתקיים $\mathrm{im}\,\Phi = \mathrm{Inn}(G)$. מה לגבי הגרעין?

$$\begin{aligned} \ker \Phi &= \{g \in G \,|\, \gamma_g = \mathrm{id}_G\} \\ &= \{g \in G \,|\, \forall x \in G : \gamma_g(x) = \mathrm{id}_G(x)\} \\ &= \left\{g \in G \,\middle|\, \forall x \in G : gxg^{-1} = x\right\} \\ &= \{g \in G \,|\, \forall x \in G : gx = xg\} = Z(G) \end{aligned}$$

אז ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

0.3 משפט קיילי

תהי X קבוצה, אז תת־קבוצה לא ריקה $P \subseteq S_X$ נקראת חבורה של תמורות אם לכל $g, h \in P$ מתקיים

$$g \circ h \in P, \qquad g^{-1} \in P$$

הגדרה 0.17. נאמר שפעולה $\varphi \colon G \to S_X$ היא נאמנה אם φ היא חח"ע.

במילים אחרות, הפעולה היא נאמנה אם לכל $g \neq h \in G$ קיים $x \in X$ כך ש-$g * x \neq h * x$. זה שקול לכל שהאיבר היחיד של G שפועל טריוויאלית על X הוא איבר היחידה, שהרי במקרה כזה $\ker \varphi = \{e_G\}$.

הערה 0.18. תהי פעולה $\varphi \colon G \to S_X$ של חבורה G על קבוצה X, ונסמן $K = \ker \varphi$. אז הפעולה φ משרה פעולה נאמנה של החבורה G/K על X לפי $(gK) * x = g * x$.

משפט 0.19 (קיילי). תהי G חבורה מסדר n. אז G איזומורפית לתת־חבורה של S_n.
כלומר שקיימת $H \leq S_n$ כך ש-$G \cong H$.

הוכחה. למעשה נוכיח טענה יותר חזקה, לחבורות מכל עוצמה: לכל חבורה G קיים שיכון $\Phi\colon G \to S_G$. אז $G \cong \operatorname{im}\Phi \le S_G$.

בשורה: ראינו שקיימת פעולה נאמנה של G על עצמה, והיא הפעולה הרגולרית. זו הפעולה של כפל משמאל באיבר קבוע. זה מבטיח ש-G משוכנת ב-S_G.

ביותר פירוט: נגדיר העתקה

$$\begin{aligned}\Phi\colon G &\to S_G\\ g &\mapsto l_g\end{aligned}$$

כאשר $l_g(x) = gx$. כדאי להשלים פרטים: לוודא כי $l_g \in S_G$, לוודא כי Φ היא הומומורפיזם וגם ש-Φ חח"ע.

$$g = g \cdot e_G = l_g(e_G) = l_h(e_G) = h \cdot e_G = h$$

ולשיכון Φ קוראים שיכון קיילי. צריך לזכור שאם $|X| = |Y|$, אז $S_X \cong S_Y$. לכן אם G מסדר n, אז $S_G \cong S_n$. □

הערה 0.20. המשפט הוא בזבזני. למשל S_5 משוכנת לפי שיכון קיילי ב-S_{120}. אבל אנחנו יודעים שיש שיכון של S_5 ב-S_5. באופן כללי למצוא את ה-m המינימלי עבורו חבורה G מסדר n משוכנת ב-S_m זה די קשה. לפעמים $m = n$, ולפעמים $m < n$.

דוגמה 0.21. נבחר $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ונבנה את שיכון קיילי $\Phi\colon G \to S_4$ במפורש. נסמן באופן שרירותי

$$\begin{aligned}1 &\leftrightarrow (1,0) \qquad & 2 &\leftrightarrow (0,0)\\ 3 &\leftrightarrow (0,1) \qquad & 4 &\leftrightarrow (1,1)\end{aligned}$$

לכל איבר $g \in G$ נראה לאן הכפל משמאל שולח אותו. ברור כי $l_2 = l_{(0,0)} = \mathrm{id}$. עבור $g = (1,0)$ נקבל

$$\begin{aligned}1 \leftrightarrow (1,0) &\mapsto (1,0) * (1,0) = (0,0) \leftrightarrow 2\\ 2 \leftrightarrow (0,0) &\mapsto (1,0) * (0,0) = (1,0) \leftrightarrow 1\\ 3 \leftrightarrow (0,1) &\mapsto (1,0) * (0,1) = (1,1) \leftrightarrow 4\\ 4 \leftrightarrow (1,1) &\mapsto (1,0) * (1,1) = (0,1) \leftrightarrow 3\end{aligned}$$

לכן $l_1 = l_{(1,0)} = (12)(34)$. עבור $(0,1)$ נעשה חישוב דומה:

$$\begin{aligned}1 \leftrightarrow (1,0) &\mapsto (0,1) * (1,0) = (1,1) \leftrightarrow 4\\ 2 \leftrightarrow (0,0) &\mapsto (0,1) * (0,0) = (0,1) \leftrightarrow 3\\ 3 \leftrightarrow (0,1) &\mapsto (0,1) * (0,1) = (0,0) \leftrightarrow 2\\ 4 \leftrightarrow (1,1) &\mapsto (0,1) * (1,1) = (1,0) \leftrightarrow 1\end{aligned}$$

ונקבל $l_3 = l_{(0,1)} = (14)(23)$. כדי לחשב לאן $(1,1)$ נשלח נעזר בכך ש-Φ הוא הומומורפיזם

$$\Phi((1,1)) = \Phi((1,0)(0,1)) = \Phi((1,0))\Phi((0,1)) = (12)(34)(14)(23) = (13)(24)$$

ואפשר לבדוק שהקבוצה

$$V = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq S_4$$

היא אכן תת־חבורה. היא נקראת חבורת הארבעה של קליין. מפני ש-V היא איחוד (זר) של מחלקות צמידות, אזי $V \lhd S_4$.

$$S_4 = \langle (12), (1234) \rangle$$

דרך אחרת לבדוק שתת־חבורה היא נורמלית זה לוודא שהיא גרעין של הומומורפיזם. נגדיר קבוצה X של כל החלוקות של $\{1,2,3,4\}$ לאיחוד זר של שתי קבוצות בגודל 2:

$$X = \{\{\{1,2\},\{3,4\}\}, \{\{1,3\},\{2,4\}\}, \{\{1,4\},\{2,3\}\}\}$$

נשים לב כי S_4 פועלת על X: לכל $\sigma \in S_4$ נשים לב כי לכל $p = \{\{a,b\},\{c,d\}\} \in X$ מתקיים

$$\sigma * p = \{\{\sigma(a), \sigma(b)\}, \{\sigma(c), \sigma(d)\}\} \in X$$

(צריך לוודא את זה). התמונה היא כל $S_X \cong S_3$ והגרעין של הפעולה הוא V.

ברור לפי משפט קיילי כי $V \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. יש ל-$S_4$ עוד תת־חבורות שאיזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ שאינן נורמליות, למשל $\langle (12), (34) \rangle$. שימו לב שיש ל-$S_4$ גם תת־חבורות שאיזומורפיות ל-$\mathbb{Z}_4$ כמו $\langle (1234) \rangle$.

מסקנה 0.22 (משפט קיילי)**.** יהי F שדה. כל חבורה סופית G מסדר n משוכנת ב-$GL_n(F)$.

$$G \hookrightarrow S_n \hookrightarrow GL_n(F)$$

אתגר: יהי $n \geq 3$. הראו כי החבורה G משוכנת ב-$GL_{n-1}(F)$.

0.4 ליבה ומנרמל

דוגמה 0.23. תהי G חבורה ותהי $H \leq G$ תת־חבורה. החבורה G פועלת על G/H לפי כפל משמאל:

$$g * xH = (gx)H$$

לכל $g \in G$ ולכל $xH \in G/H$. נמצא את המייצב של xH:

$$\begin{aligned} \mathrm{stab}(xH) &= \{g \in G \,|\, gxH = xH\} \\ &= \{g \in G \,|\, gx \in xH\} \\ &= \left\{g \in G \,\middle|\, g \in xHx^{-1}\right\} = xHx^{-1} \end{aligned}$$

וקיבלנו שהמייצב הוא תת־חבורה הצמודה ל-H.

תרגיל 0.24 (לבית, קצת קשה)**.** יהי m מספר טבעי, ותהי G חבורה נוצרת סופית. הוכיחו כי ל-G יש מספר סופי של תת־חבורות מאינדקס m.

הגדרה 0.25. הליבה של תת־חבורה $H \le G$ היא תת־החבורה של G העונה לאחת מן ההגדרות השקולות הבאות:

1. הגרעין של הפעולה $\varphi\colon G \to S_{G/H}$ לפי כפל משמאל.

$$\mathrm{Core}_G(H) = \ker\varphi$$

2. חיתוך תת־החבורות הצמודות ל-H:

$$\mathrm{Core}_G(H) = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$$

כלומר חיתוך המייצבים של הפעולה לעיל.

3. תת־החבורה הנורמלית הגדולה ביותר של G המוכלת ב-H. זו תת־החבורה הנוצרת על ידי כל תת־החבורות הנורמליות של G המוכלות ב-H:

$$\mathrm{Core}_G(H) = \langle\{N \mid N \lhd G, N \le H\}\rangle$$

תרגיל 0.26. וודאו שההגדרות ברורות לכם. הסיקו כי $H \lhd G$ אם ורק אם $\mathrm{Core}_G(H) = H$ לפי כל אחת מן ההגדרות.

הגדרה 0.27. המנרמל של תת־חבורה $H \le G$ הוא

$$N_G(H) \coloneqq \{g \in G \mid gH = Hg\}$$

הערה 0.28. ברור כי $H \subseteq N_G(H)$. המנרמל $N_G(H)$ הוא המייצב של H בפעולה של G על קבוצת כל תת־החבורות שלה עם הצמדה.

בפרט, המנרמל הוא תת־חבורה של G. מתקיים ש-$H \lhd N_G(H)$ כמעט לפי הגדרה, והוא תת־החבורה הגדולה ביותר של G שבה H נורמלית. לכן $H \lhd G$ אם ורק אם $N_G(H) = G$.

לפי משפט מסלול־מייצב יש התאמה חח"ע ועל בין מחלקות שמאליות של $N_G(H)$ לבין המסלול של H תחת הפעולה של G על תת־החבורות לגבי הצמדה. לכן האינדקס $[G : N_G(H)]$ שווה למספר תת־החבורות הצמודות ל-H.

הגדרה 0.29. תהי G חבורה ותהי $H \le G$ תת־חבורה. המְרַכֵּז של H ב-G הוא

$$C_G(H) = \{g \in G \mid \forall h \in H, gh = hg\}$$

הערה 0.30. ברור כי $C_G(H) \subseteq N_G(H)$ וגם

$$C_G(H) = \bigcap_{h\in H} C_G(h)$$

משפט 0.31 (משפט N/C)**.** תהי G חבורה ותהי $H \leq G$ תת־חבורה. אז קיים שיכון

$$N_G(H)/C_G(H) \hookrightarrow \operatorname{Aut}(H)$$

הוכחה. החבורה G פועלת על עצמה על ידי הצמדה, אבל לא בהכרח על H. הפעולה היא באופן כללי הפעלת אוטומורפיזם פנימי של G:

$$g * x = \gamma_g(x) = gxg^{-1}$$

נשים לב כי $\gamma_g \in \operatorname{Inn}(G)$ משרה אוטומורפיזם $\overline{\gamma}_g \in \operatorname{Aut}(H)$ אם ורק אם $g \in N_G(H)$. אחרת $\overline{\gamma}_g(h) \notin H$ עבור $h \in H$ כלשהו.

לכן $N_G(H)$ פועלת על H על ידי הצמדה, ולכן יש הומומורפיזם $\psi\colon N_G(H) \to S_H$. התמונה של ψ היא רק של אוטומורפיזמים של H, והגרעין כולל את כל האיברים של G שמקבעים (על ידי הצמדה) את איברי H, וזה בדיוק $C_G(H)$. בסך הכל עם משפט האיזומורפיזם הראשון, קיבלנו את השיכון שרצינו. $\square$

משפט 0.32 (העידון של משפט קיילי)**.** תהי G חבורה ותהי $H \leq G$ תת־חבורה. אז קיים שיכון

$$G/\operatorname{Core}_G(H) \to S_{G/H}$$

הוכחה. מסקנה מהגדרה של ליבה יחד עם התזכורת בתחילת ההרצאה. $\square$

מסקנה 0.33. אם $[G:H] = d$ וגם $|G| > d!$, אז $\operatorname{Core}_G(H) \neq \{e\}$.