מבנים אלגבריים תרגול 6

27 באפריל 2021

1 תתי־חבורות נורמליות

תת־חבורה H של חבורה G היא נורמלית אם לכל איבר $g \in G$ מתקיים: $gH = Hg$.
סימון מקובל להיותה של תת־חבורה נורמלית: $H \trianglelefteq G$.
תרגילים:

1. תהא G חבורה, ותהא $H \leq G$ תת־חבורה. הוכיחו:

$$H \trianglelefteq G \iff \forall g \in G \forall h \in H : g^{-1}hg \in H$$

פתרון: $\Rightarrow$. יהיו $g \in G, h \in H$. נשים לב ש־ $hg \in Hg$. מהנתון על נורמליות נקבל $hg \in gH = \{gh' : h' \in H\}$ ולכן קיים $h' \in H$ כך ש־ $hg = gh'$. כעת נכפיל ב־ g^{-1} משמאל ונקבל:

$$g^{-1}hg = g^{-1}gh' = h' \in H$$

$\Leftarrow$. כאן בעצם צריך להוכיח שלכל $g \in G$ מתקיים שיוויון הקבוצות $gH = Hg$.
נשתמש בהכלה דו־כיוונית:
$\subseteq$: יהי $gh \in gH$ צריך להוכיח $gh \in Hg$. ידוע מהנתון $\forall g \in G \forall h \in H : g^{-1}hg \in H$ שעבור g^{-1} מתקיים $ghg^{-1} = \left(g^{-1}\right)^{-1} hg^{-1} \in H$. זאת אומרת שיש $h' \in H$ כך ש־ $ghg^{-1} = h'$ כעת נכפיל ב־g מימין ונקבל $gh = h'g \in Hg$.
$\supseteq$: יהיה $h \in H$ צריך להוכיח $hg \in gH$. מהנתון ידוע $g^{-1}hg \in H$ ולכן יש $h' \in H$ כך ש־ $g^{-1}hg = h'$ כעת מכפילים ב־g משמאל וקבלים $hg = gh' \in gH$.

2. נציג תת־חבורה נורמלית חשובה של S_n. בשלבים:

(א) נגדיר סימן של תמורה.: תהי $\pi \in S_n$ נגדיר:

$$Inv(\pi) = \{(i,j) : i < j \wedge \pi(j) < \pi(i)\}$$

כעת נספור אותם:

$$inv(\pi) = |Inv(\pi)|$$

ומכאן לסימן:

$$sgn(\pi) = (-1)^{inv(\pi)}$$

למשל עבור S_3:

	id	$(1,2)$	$(2,3)$	$(1,3)$	$(1,2,3)$	$(3,2,1)$
$Inv(\pi)$	$\varnothing$	$\{(1,2)\}$	$\{(2,3)\}$	$\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$	$\{(1,3),(2,3)\}$	$\{(1,2),(1,3)\}$
$inv(\pi)$	0	1	1	3	2	2
$sgn(\pi)$	+	-	-	-	+	+

(ב) טענה שלא נוכיח בקרוס:

$$\forall \pi, \sigma \in S_n : sgn(\pi \circ \sigma) = sgn(\pi) \cdot sgn(\sigma)$$

(ג) בבית תוכיחו שהסימן של מחזור מאורך m הוא $(-1)^{m-1}$.

(ד) מתקיים: $sgn(\pi^{-1}) = sgn(\pi)$.

(ה) נגדיר את קבוצת התמורות הזוגיות:

$$A_n = \{\pi \in S_n : sgn(\pi) = +\}$$

הוכיחו: $A_n \trianglelefteq S_n$.

פתרון: נראה תחילה שהיא ת"ח: תמורת הזהות תמיד זוגית, ולכן $id \in A_n$.

בנוסף, אם $\pi, \sigma \in S_n$ אז נראה את התנאי המקוצר:

$$\pi \circ \sigma^{-1} \in A_n$$

ואכן:

$$sgn(\pi \circ \sigma^{-1}) = sgn(\pi) \cdot sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\pi) \cdot sgn(\sigma) = 1 \cdot 1 = 1$$

נוכיח נורמליות ע"י שנראה שהאינדקס הוא 2, כי כל ת"ח מאינדקס 2 היא נורמלית. כלומר, צריך להראות:

$$[S_n : A_n] = \frac{|S_n|}{|A_n|} = 2$$

נוכיח באופן הבא: נגדיר את אוסף התמורות האי־זוגיות ב־ B_n, ונראה $|A_n| = |B_n|$.
נגדיר $f : A_n \to B_n$ ע"י:

$$f(\pi \in A_n) = (1,2)\pi \in B_n$$

ובדומה ההופכית:

$$f^{-1}(\pi \in B_n) = (1,2)\pi \in A_n$$

"קל לראות" שאכן מדובר בפונקציה ובהופכי שלה:

$$f^{-1} \circ f(\pi \in A_n) = f^{-1}((1,2)\pi) = \underbrace{(1,2)(1,2)}_{=id}\pi = \pi$$

$$f \circ f^{-1}(\pi \in B_n) = f((1,2)\pi) = (1,2)(1,2)\pi = \pi$$

ולכן בסה"כ: $|A_n| = |B_n|$, וכיון שכל תמורה היא או זוגית או אי־זוגית נקבל שהקבוצות בעלות גודל שווה, $\frac{|S_n|}{|A_n|}$. ולכן מקבלים:

$$[S_n : A_n] = \frac{|S_n|}{|A_n|} = 2$$

אפשרות נוספת היא להשתמש בתרגיל 1, ולהוכיח :

$$\forall g \in G \forall h \in H : g^{-1}hg \in H$$

אז יהיו $\sigma \in S_n, \pi \in A_n$. צריך להראות:

$$\sigma^{-1}\pi\sigma \in A_n$$

כלומר, שהסימן זוגי. ואכן:

$$sgn(\sigma^{-1}\pi\sigma) = sgn(\sigma^{-1}) \cdot sgn(\pi) \cdot sgn(\sigma)$$

כעת בגלל ש־ $sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$ נקבל שהם "מבטלים" אחד את השני ולכן:

$$sgn(\sigma^{-1}\pi\sigma) = sgn(\pi) = 1$$