מודרנית 1 - תרגול 5

1 בדצמבר 2014

תרגיל

יהי $\Omega=\mathbb{R}$ ואת S להיות קבוצת הקבוצות, A, המדידות לבג עבורן מתקיים $A=-A$ (כלומר יש סימטריה ביחס לציר y). מהן הפונקציות המדידות S $f:\nleq\to\mathbb{R}$?

פתרון נבדוק כי S היא σ אלגברה:

1. ודאי ש$\emptyset,\mathbb{R}\in S$ (מדידות לבג וסימטריות).
2. אם $A\in S$ אזי: A מדידה לבג $\Leftrightarrow$ A^c מדידה לבג וגם $x\in A^c\Leftrightarrow x\notin A\Leftrightarrow -x\notin A\Leftrightarrow -x\in A^c$ ולכן $A^c=-A^c$. $\Leftarrow A^c\in S$.
3. $\{A_n\}\subseteq S$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{\mathbb{N}}A_n$ מדידה לבג וגם $x\in\bigcup_{\mathbb{N}}A_n$ $\Leftarrow$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש$x\in A_n$ $\Leftarrow$ $-x\in\bigcup_{\mathbb{N}}A_n$ ובסה"כ $\bigcup_{\mathbb{N}}A_n\in S$.

כעת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה S אז לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ $\{f=\alpha\}\in S$ $\Leftarrow$ $\{f=\alpha\}=-\{f=\alpha\}$ ומדידה לבג כלומר לכל x:

$$f(-x)=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$$

וזאת לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ ז"א

$$\forall x\in\mathbb{R}:f(x)=f(-x)$$

כלומר f מדידה אמ"מ f זוגית. נדגים:

1. f קבועה - מדידה כי היא זוגית.
2. $f(x)=\sin x$ - לא מדידה כי הינה אי זוגית.
3. $f(x)=\cos x$ - מדידה כי היא זוגית.
4. $f(x)=|x|$ - מדידה כי גם היא זוגית.

טענה

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אם f גזירה אזי f' מדידה.

הוכחה

f גזירה ב$\mathbb{R}$ בפרט רציפה ובפרט מדידה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_n(x) = n\left(f\left(x + {}^1\!/\!_n\right) - f(x)\right)$ ואז לכל $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) \to f'(x)$ (קיים הגבול ושווה לערך של $f'(x)$). לכל n g_n מדידה כצירוף לינארי של פונקציות מדידות לכן כפי שראינו בהרצאה - הגבול גם הוא פונקציה מדידה. מ.ש.ל.

הגדרה

כמעט בכל מקום (כב"מ)-μ: ז"א פרט לקבוצה בעלת מידה $\mu = 0$.

משפט אגורוב

נניח ש$\{f_n\}_{\mathbb{N}}$ סידרת פונקציות מדידות המתכנסת כמעט בכל מקום ל-f בE.אזי לכל $\delta > 0$ קיימת קבוצה מדידה $E_\delta \subset E$ כך ש:

1. $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$.
2. הסידרה f_n מתכנסת במ"ש ל$f(x)$ ב-E_δ.

הוכחה

1. ראינו בהרצאה שבתנאים הנ"ל f מדידה. נגדיר סדרה של קבוצות

$$E_n^m = \bigcap_{i \geq n} \left\{ x \mid |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\}$$

לכן E_n^m לכל n, m היא קבוצת הxים עבורם מתקיים

$$\forall i \geq n \quad |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

נגדיר לכל m:

$$\left(\liminf_n E_n^m\right) \qquad E^m := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^m$$

ברור מההגדרה של הקבוצות שלכל n מתקיים ש:

$$E_1^m \subseteq E_2^m \subseteq \dots$$

סדרה עולה. לכן רציפות המידה מתקיים

$$\mu(E^m) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^m\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n^m)$$

מכאן, שקיים $n(m)$ כך ש:

$$\mu\left(E^m - E_{n(m)}^m\right) < \frac{\delta}{2^m}$$

נגדיר:

$$E_\delta = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} E^m_{n(m)}$$

ונוכיח כי E_δ מקיימת (1), (2).

(א) טענה 2: ר"ל $f_n(x) \to f(x)$ במ"ש ב־E_δ. זה נובע מכך שאם $x \in E_\delta$ אז $\forall i \geq n(m) : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$ וזאת לכל $m \in \mathbb{N}$. מ.ש.ל.

(ב) טענה 1: ר"ל $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$. נשים לב כי $\mu(E - E^m) = 0$ לכל m.
<u>הסבר:</u> אם $x_0 \in E - E^m$ אז

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geq \frac{1}{m}$$

כמעט לכל i (פרט למספר סופי של i־ים). ז"א הסידרה $\{f_n(x_0)\}$ לא מתכנסת ל־$f(x_0)$ ומכך ש־$f_n \to f$ כב"מ נובע ש־$\mu(E - E^m) = 0$. לכן

$$\mu\left(E - E^m_{n(m)}\right) = \mu\left(E^m - E^m_{n(m)}\right) \leq \frac{\delta}{2^m}$$

לכן,

$$\begin{aligned}
\mu(E - E_\delta) &= \mu\left(E - \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} E^m_{n(m)}\right)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(E - E^m_{n(m)}\right)\right) \\
&\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \mu\left(E - E^m_{n(m)}\right) \\
&\leq \sum \frac{\delta}{2^m} = \delta \\
\overbrace{\mu(E - E_\delta)}^{<\delta} + \mu(E_\delta) &= \mu(E) \\
\mu(E_\delta) &> \mu(E) - \delta
\end{aligned}$$

הגדרה

לכל סדרה לא יורדת $\{\alpha_n\}$ ב־$[-\infty, \infty]$ יש גבול, והוא ה־sup שלה (החסם העליון) ולכל סדרה לא עולה $\{\alpha_n\}$ ב־$[-\infty, \infty]$ יש גבול, והוא ה־inf שלה (החסם התחתון).

הגדרה

$\{\alpha_n\} \subset [-\infty, \infty]$
$\limsup \alpha_n$ ־ הגבול העליון: הגבול החלקי הגדול ביותר.

$\liminf \alpha_n$ - הגבול התחתון: הגבול החלקי הקטן ביותר.
אם $\beta_n = \sup_{k\geq n} \alpha_k$, $\{\alpha_n\}_{k\geq n}$ חלקית ל$\{\alpha_n\}_{k\geq n-1}$ ולכן $\{\beta_n\}$סדרה לא עולה.

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \beta_n = \inf_n \beta_n = \limsup_n \alpha_n$$

כלומר

$$\limsup_n \alpha_n = \lim \left(\sup_{k\geq n} \alpha_k\right) = \inf_n \left(\sup_{k\geq n} \alpha_k\right)$$

ובאופן דומה

$$\liminf_n \alpha_n = \lim \left(\inf_{k\geq n} \alpha_k\right) = \sup_n \left(\inf_{k\geq n} \alpha_k\right)$$

וכן $\lim \alpha_n$קיים אס"ם $\liminf \alpha_n = \limsup \alpha_n$ והערך שלו הוא הערך המשותף.

משפט

תהי $\{f_n\}$ סדרת פ' מדידות, אזי

1. $\sup f_n$
2. $\inf f_n$
3. $\limsup f_n$
4. $\liminf f_n$

הן מדידות.

הוכחה

1. $h = \sup f_n$ אזי,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \{h > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > \alpha\}$$

כיוון ש

$$\begin{aligned} x &\in \{h > \alpha\} \Leftrightarrow h(x) > \alpha \\ &\Rightarrow \exists n\, f_n(x) > \alpha \\ &\Leftrightarrow \exists n : x \in \{f_n > \alpha\} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\mathbb{N}} \{f_n > \alpha\} \end{aligned}$$

ואם $x \in \bigcup_{\mathbb{N}} \{f_n > \alpha\}$ אזי $f_n(x) > \alpha$ עבור n מסוים ולכן $n(x) \geq f_n(x) > \alpha$
כלומר $x \in \{h > \alpha\}$
ולכן h מדידה

(א)

$$\inf f_n = -\sup\left(-f_n\right)$$

f_n מדידה ולכן $-f_n$ מדידה ולכן $\sup\left(-f_n\right)$ מדידה ולכן $-\sup\left(-f_n\right)$.

(ב)

$$\limsup f_n = \inf_n\left(\sup_{n\leq k} f_k\right)$$

ולכן מדידה לפי $(2)\,,(1)$.

(ג) ובדומה

$$\liminf f_n = \sup_n\left(\inf_{n\leq k} f_k\right)$$

ולכן מדידה לפי $(2)\,,(1)$.

תרגיל:

תהי f פו' בעלת תחום מדיד D. הראו כי f מדידה אס"ם הפונקציה

$$g\left(x\right) = \begin{cases} f\left(x\right) & x\in D \\ 0 & else \end{cases}$$

מדידה.

הוכחה

$\Leftarrow$נניח f מדידה, ויהי $a\in\mathbb{R}$. אם $0\geq\alpha$ אזי:

$$\{x|g\left(x\right)>\alpha\} = \{x|f\left(x\right)>\alpha\}\in S$$

אם $\alpha<0$ אזי:

$$\{x|g\left(x\right)>\alpha\} = \{x|f\left(x\right)>\alpha\}\cup D^c\in S$$

ולכן g מדידה.

$\Rightarrow$ נניח g מדידה. לפי הגדרה $f=g|_D$

$$D, D^c\in S, \mathbb{R} = D\cup D^c$$

ולפי תרגיל שפתרתם g מדידה אס"ם $g|_D,\, g|_{D^c}$ מדידות.

תרגיל:

$U\subset\mathbb{R}^{d}$ פתוחה ותהי $f:U\to\mathbb{R}$, הראו שהקבוצה

$$A:=\{x\in U\,|\,f\text{ is continuous at }x\}$$

היא מטיפוס G_{δ} (כלומר חיתוך מני של קבוצות פתוחות) ולכן שייכת ל$\mathbb{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$.
לכל $x\in U$, $\delta>0$ נגדיר את "התנודה" של f בכדור $B\left(x,\delta\right)$ ע"י

$$\omega\left(x,\delta\right):=\sup\left\{ \left|f\left(s\right)-f\left(t\right)\right|\,|\,s,t\in B\left(x,\delta\right)\right\}$$

ואת ה"תנודה" בנק' x ע"י:

$$\omega\left(x\right)=\inf\left\{ \omega\left(x,\delta\right)|\delta>0\right\}$$

<u>טענת ביניים:</u>
לכל $a\in\mathbb{R}$ הקבוצה $E_{\alpha}:=\left\{ x|\omega\left(x\right)<\alpha\right\}$ פתוחה.
<u>הוכחת הטענה:</u> תהי $x_{0}\in E_{\alpha}$, ישנה $0<\delta_{0}$

$$\omega\left(x_{0},\delta_{0}\right)=\sup\left\{ \left|f\left(t\right)-f\left(s\right)\right|\,|\,t,s\in B\left(x_{0},\delta_{0}\right)\right\} <\alpha$$

לכן, אם $x\in B\left(x_{0},\frac{\delta_{0}}{2}\right)$ אזי:

$$\begin{aligned}\omega\left(x,\frac{\delta_{0}}{2}\right) & = \sup\left\{ \left|f\left(t\right)-f\left(s\right)\right|\,|\,t,s\in B\left(x,\frac{\delta_{0}}{2}\right)\right\} \\ & \leq \sup\left\{ \left|f\left(t\right)-f\left(s\right)\right|\,|\,t,s\in B\left(x_{0},\delta_{0}\right)\right\} \\ & < \alpha\end{aligned}$$

ומכאן ש: $\omega\left(x\right)<\alpha$ (כ-inf). זאת לכל $x\in B\left(x_{0},\delta_{0}/2\right)$. מש"ל טענת ביניים.
ניתן לראות כי f רציפה בx אס"ם $\omega\left(x\right)=0$, ולכן:

$$\begin{aligned}A & = \left\{ x|\omega\left(x\right)=0\right\} \\ & = \bigcap_{\mathbb{N}}\left\{ x|\omega\left(x\right)<\frac{1}{n}\right\} \\ & = \bigcap_{\mathbb{N}}E_{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

הקבוצות $E_{\frac{1}{n}}$ פתוחות לפי טענת הביניים ולכן A מטיפוס G_{δ}.