

מתמטיקה בדידה – תרגיל 10

שאלה 1

יהיו α, β, γ קרדינלים. הוכיחו ישירות כי $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. [הדרכה: הניחו כי A, B, C קבוצות זרות מעוצמות α, β, γ בהתאמה והראו ישירות כי $|A \times (B \cup C)| = |A \times B \cup A \times C|$].

שאלה 2

הוכיחו:

$$\begin{aligned} 1. \quad |(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{Z}}| &= |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| \\ 2. \quad |\{0,1,2\}^{[0,1] \times \mathbb{N}}| &= |P(P(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}))| \end{aligned}$$

הדרכה: השתמשו בחשבון עוצמות.

שאלה 3

תהי A קבוצה אינסופית.

- הראו שקיימת פונקציה חד-חד ערכית מ- A^A אל $P(A \times A)$. [רמז: פונקציה היא יחס].
- הראו כי לכל קרדינל אינסופי α מתקיים $\alpha^\alpha = 2^\alpha$.
- הראו כי לכל שני קרדינלים אינסופיים $\beta \leq \alpha$ מתקיים $\beta^\alpha = 2^\alpha$.

שאלה 4

פשטו את הביטויים הבאים. ניתן להיעזר בשאלה 3. התשובות צריכות להיות ביטויים כגון $\aleph_0, \aleph, \Phi := 2^\aleph, 2^\Phi, \dots$

$$\begin{aligned} 1. \quad (\aleph_0 + \aleph)^{\aleph_0} \\ 2. \quad \aleph(5^\aleph + \aleph_0^{\aleph_0}) \\ 3. \quad (3^\aleph)^{3^{\aleph_0}} + \aleph^\aleph \\ 4. \quad \aleph \cdot \aleph_0^{(\aleph_0 + \aleph)} \end{aligned}$$

שאלה 5

חשבו את העוצמות של הקבוצות הבאות. התשובות צריכות להיות ביטויים כגון $\aleph_0, \aleph, \Phi := 2^\aleph, 2^\Phi, \dots$. נמקו את תשובתכם.

- קבוצת הפונקציות העולות ממש מ- \mathbb{N} ל- \mathbb{N} .
- קבוצת כל הזוגות (A, B) כך ש- A קבוצה של מספרים שלמים זוגיים ו- B קבוצה של מספרים שלמים אי-זוגיים.
- קבוצת כל הפונקציות f מהמלבן $[0,2] \times [1,2]$ ל- \mathbb{R} המקיימות $f(1,1) = \pi$.
- תתי הקבוצות של $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ שמכילות את $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

