פתרון תרגיל 11 בפונקציות מרוכבות

1. נשתמש במשפט השאריות

(א) נזכור ש

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ולכן

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{z^2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}$$

$$\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n+3}$$

הסינגולריות היחידה היא 0 והשארית בה מתקבלת כאשר $n = 2$ כלומר

$$\mathrm{Res}(\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}, 0) = \frac{(-1)^2}{2!} = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}} \mathrm{d}z = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i$$

(ב) נזכור ש

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \ldots + \frac{1}{z} + 1$$

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-2n-1}}{(2n+1)!} = \ldots - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{z}$$

אנחנו מעוניינים בשארית של המכפלה

$$e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z} = (\ldots + \frac{1}{z} + 1)(\ldots - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{z})$$

קל לראות שהמקדם של $\frac{1}{z}$ במכפלה מתקבל רק מהכפל של שני האיברים הימניים בביטויים האלה,כי כל השאר יתנו חזקות גדולות מדי. ולכן

$$\int\limits_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi i \,\mathrm{Res}(e^{\frac{1}{z}} \sin\frac{1}{z}, 0) = 2\pi i$$

(ג) בתוך התחום יש סינגולאריות אחת שהיא $z = 1$ וזהו כמובן קוטב מסדר 6.
נשתמש בנוסחא

$$\mathrm{Res}(\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}, 1) = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}(\frac{z^6}{(z-3)})$$

נבצע חישוב לפי לייבניץ

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}\frac{z^6}{(z-3)} &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}((z-3)^{-1})\frac{\mathrm{d}^{5-k}}{\mathrm{d}z^{5-k}}(z^6) = \\ &= (z-3)^{-1}720z + 5\cdot(-(z-3)^{-2})\cdot 360z^2 + 10\cdot 2(z-3)^{-3}\cdot 120z^3 \\ &+ 10\cdot(-6(z-3)^{-4})\cdot 30z^4 + 5\cdot 24(z-3)^{-5}\cdot 6z^5 - 120(z-3)^{-6}\cdot z^6\end{aligned}$$

נציב $z = 1$ ונקבל:

$$-\frac{720}{2} - \frac{5\cdot 360}{4} - \frac{20\cdot 120}{8} - \frac{60\cdot 30}{16} - \frac{30\cdot 24}{32} - \frac{120}{64}$$

ולכן

$$\mathrm{Res}(\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}, 1) = \frac{1}{5!}(-\frac{720}{2}-\frac{5\cdot 360}{4}-\frac{20\cdot 120}{8}-\frac{60\cdot 30}{16}-\frac{30\cdot 24}{32}-\frac{120}{64}) = -\frac{665}{64}$$

ולכן

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{-665}{64} = -\pi i\frac{665}{32}$$

(ד) בתוך התחום יש כמה סינגולאריות. $z = 0$, $z = \pm\pi$. שאר הסינגולריות כבר מחוץ לתחום. כל הסינגולריות הן קטבים מסדר 1 (כי הן אפסים מסדר 1 של $\sin z$).

$$\mathrm{Res}(\frac{1+z}{\sin z}, 0) = \frac{1+0}{\cos 0} = 1$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1+z}{\sin z}, \pi) = \frac{1+\pi}{\cos\pi} = -1-\pi$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1+z}{\sin z}, -\pi) = \frac{1-\pi}{\cos -\pi} = -1+\pi$$

ולכן סכום הסינגולאריות הוא -1 ולכן

$$\int\limits_{\gamma}\frac{1+z}{\sin z}\mathrm{d}z = -2\pi i$$

2. ראינו בתרגול שאם z_0 הוא אפס מסדר m של $f(z)$ אז

$$\mathrm{Res}(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0) = m$$

ואם הוא קוטב מסדר m אז

$$\mathrm{Res}(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0) = -m$$

לפי זה (או לפי עקרון הארגומנט שזה די אותו דבר)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=4}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 3+4-5=2$$

$z=1,2,3$ כי $z=5$ מחוץ לתחום המדובר.

.3

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{1+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\mathrm{d}\theta = \int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{3-\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$$

נציב $t=2\theta$ ולכן $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}\theta$

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{3-\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta = \int\limits_0^{4\pi}\frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t$$

קל לראות ש

$$\int\limits_{2\pi}^{4\pi}\frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t$$

(מי שמתעקש יכול להוכיח זאת ע"י הצבה של $\varphi = t-2\pi$) ולכן

$$\int\limits_0^{4\pi}\frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{3-\cos t}\mathrm{d}t$$

עכשיו נבצע הצבה מרוכבת

$$z = e^{it}$$
$$\mathrm{d}z = ie^{it}\mathrm{d}t = iz\mathrm{d}t$$
$$\cos t = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{2}{3-(\frac{z+\bar{z}}{2})}\frac{1}{iz}\mathrm{d}z = \int\limits_{|z|=1} \frac{4}{6-z-\bar{z}}\frac{1}{iz}\mathrm{d}z = 4i\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2-6z+1}\mathrm{d}z$$

$$= 4i\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{(z-(3-\sqrt{8}))(z-(3+\sqrt{8}))}\mathrm{d}z$$

נשים לב ש $3-\sqrt{8}$ היא סינגולריות בתוך התחום ו $3+\sqrt{8}$ מחוצה לו. קל לראות ש

$$\mathrm{Res}(\frac{1}{(z-(3-\sqrt{8}))(z-(3+\sqrt{8}))}, 3-\sqrt{8}) = \frac{1}{3-\sqrt{8}-3-\sqrt{8}} = -\frac{1}{2\sqrt{8}}$$

ולכן לפי משפט השאריות

$$4i\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{(z-(3-\sqrt{8}))(z-(3+\sqrt{8}))}\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot 4i\cdot(-\frac{1}{2\sqrt{8}}) = \sqrt{2}\pi$$

כנדרש.