תרגיל 9 בפונקציות מרוכבות

1. תהי $f(z)$ אנלטית בעיגול היחידה (כלומר ב $\{z \mid |z| < 1\}$) עם התכונה שלכל z כך ש $0 < |z| < 1$ מתקיים ש $|f(z)| \leq \ln \frac{1}{|z|}$. הוכיחו כי f היא פונקציית האפס.
פתרון: היות ש
$$\lim_{x\to 1^-} \ln \frac{1}{x} = 0$$
ולפי סנדויץ אנחנו מקבלים ש
$$\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = 0$$
ולכן אם נגדיר $g(z)$ לפי
$$g(z) = \begin{cases} f(z) & |z| < 1 \\ 0 & |z| = 1 \end{cases}$$
אז זאת תהיה פונקציה אנליטית בפנים עיגול היחידה ורציפה על שפתו. לפי עקרון ה $\max$ היא מקבלת מקסימום על השפה. אבל הערך של $|g(z)|$ על עיגול היחידה עצמו הוא 0. ולכן בהכרח
$$g(z) = 0$$
ובפרט
$$f(z) = 0$$
כנדרש.

2. מצאו את האפסים של הפונקציות הבאות ומצאו את הסדר שלהם.

(א) $(e^z - 1)\sin z \cos z$.
ל $e^z - 1$ יש אפס בנקודות $z = 2\pi i k$ וזה אפס מסדר 1 כי הנגזרת (שהיא e^z) לא מתאפסת.
ל $\sin z$ יש אפס בנקודות $z = \pi k$ וזה אפס מסדר 1 כי הנגזרת $\cos z$ לא מתאפסת בנקודות אלו.
ל $\cos z$ יש אפס בנקודות $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ושוב אלו אפסים מסדר 1 כי הנגזרת $-\sin z$ לא מתאפסת בנקודות אלה.
בסך הכל למכפלה יש:
בנקודות $z = 2\pi i k$ כאשר $k \neq 0$ יש אפס מסדר 1.
בנקודות $\frac{\pi}{2} k$ כאשר $k \neq 0$ יש אפס מסדר 1.
בנקודה $z = 0$ יש אפס מסדר 2.

(ב) $\frac{e^{z^2}-1}{z}$
האפסים מתקבלים כאשר
$$e^{z^2} = 1$$

כלומר כאשר

$$z^2 = 2\pi ik$$

את המקרה $k = 0$ נשאיר רגע בצד. כעת, היות שהנגזרת של המונה היא $2ze^{z^2}$ רואים שאף אחד מהאפסים לא מאפס את הנגזרת לכן הם אפסים מסדר 1 של $e^{z^2} - 1$ כמו כן אלו לא אפסים של z ולכן בסה"כ כל אלה הם אפסים מסדר 1 של המנה.

לגבי הנקודה $z = 0$, קודם כל השאלה לא מנוסחת מספיק טוב כי הפונקציה הנוכחית לא מוגדרת בכלל ב $z = 0$. הכוונה היא כמובן להשלמה אנליטית של הפונקציה כי זו סינגולריות סליקה. בכל אופן קל לראות שהפיתוח טיילור הוא

$$\frac{e^{z^2} - 1}{z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} - 1}{z} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{n!}$$

קל לראות שפיתוח זה מתחיל ב z^1 ולכן זהו אפס מסדר 1.

לסיכום: האפסים הם ערכי z עבורם $z^2 = 2\pi ik$ והם כולם אפסים מסדר 1.

3. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות $f''(\frac{1}{n!}) + f(\frac{1}{n!}) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
פתרון: נזכור שאם f שלמה אז בוודאי שf'' שלמה. לכן, לפי משפט היחידות

$$f''(z) + f(z) = 0$$

זאת משוואה דיפרנציאלית שפתרונה:

$$f(z) = c_1 e^{iz} + c_2 e^{-iz}$$

4. מצאו את כל הפונקציות האנליטיות ב $\{z \mid |z| < 2\}$ המקיימות ש $f(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
פתרון: אנחנו רוצים כמובן להשתמש במשפט היחידות. נסמן $z = 1 - \frac{1}{n}$, כלומר $n = \frac{1}{1-z}$ ונציב זאת באגף ימין:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = (1-z)^2 - (1-z) = 1 - 2z + z^2 - 1 + z = z^2 - z$$

כלומר,אם נגדיר $g(z) = z^2 - z$ אז יתקיים שלכל $n \in \mathbb{N}$

$$f(1 - \frac{1}{n}) = g(1 - \frac{1}{n})$$

ולכן לפי משפט היחידות

$$f(z) = z^2 - z$$

בכל התחום המדובר.

5. האם קיימת פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)| = |1 - |z||$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
פתרון: נניח שקיימת כזו פונקציה, אז לכל z על מעגל היחידה מתקיים

$$|f(z)| = |1 - |z|| = 0$$

כלומר $f(z) = 0$ על מעגל היחידה, ולפי עקרון היחידות $f(z) = 0$. אבל $f(z)$ לא מקיימת את התנאי שלעיל ולכן אין פונקציות כנ"ל.