

# מבני נתונים ואלגוריתמים

4 בדצמבר 2011

## בעיית Selection - המשך

נתונה רשימה  $L$  באורך  $N$ . רוצים את האיבר  $k$  בגדלו ברשימה.

פתרון

---

אלגוריתם 1 פתרון בעיית Selection

בוחרים איבר  $x \in L$  באקראי.

מחלקים את  $L$  לשני חלקים - איברים שגדולים מ- $x$  ואיברים שקטנים מ- $x$ .

אם  $\text{len}(L_1) \geq k$  מחזירים  $\text{Select}(L_1, k)$

אם  $\text{len}(L_1) = k - 1$  מחזירים את  $x$

אחרת מחזירים  $\text{Select}(L_2, k - \text{len}(L_1) - 1)$

---

נסמן  $T(n)$  - תוחלת זמן הריצה.

נהיה "פסימיים" ונניח שתמיד נבחרת תת הרשימה הארוכה יותר.

אורך תת הרשימה הארוכה מתפלג אחיד בין  $[\frac{n}{2}, n - 1]$ .

$$T(n) \leq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} T(i) + 2n$$

(ה- $2n$  מגיע מהחלוקה לשתי הרשימות).

נוכיח באינדוקציה ש- $T(n) \leq 8n$ .

עבור  $n = 1$ ,  $T(1) \leq 8$ .

נניח שזה נכון לכל  $i < n$ , אזי:

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{2}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} T(i) + 2n \\ &\leq \frac{2}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} 8i + 2n \\ &= \frac{2}{n} \cdot \left[ \frac{n}{2} \left( \frac{8 \cdot \frac{n}{2} + 8 \cdot (n-1)}{2} \right) \right] + 2n \\ &= (2n + 4n - 4) + 2n \\ &= 8n - 4 \leq 8n \end{aligned}$$

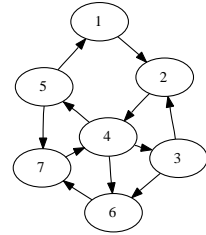
לכן זמן הריצה הממוצע הוא  $O(n)$  (או לכל היותר  $8n$ ).

בדקו בבית - זמן הריצה הגרוע ביותר הוא  $O(n^2)$  (כמו Quick-Sort).

## גרפים

### DFS ו BFS

נבצע  $DFS$  ו  $BFS$  מקודקוד 1 לגרף הבא:



$BFS$  נעשה עם תור:  
סדר הכניסה והיציאה מהתור יהיה:

1 → in  
2 → in  
1 → out  
4 → in  
2 → out  
3 → in  
5 → in  
6 → in  
4 → out  
3 → out  
7 → in  
5 → out  
6 → out  
7 → out

לכן סדר כניסת הקדקדים לתור הוא:

1243567

כעת נעשה  $DFS$  עם מחסנית, נכניס את הקדקדים למחסנית בסדר:

1243567

ואז נוציא אותם לפי הסדר מהמחסנית.

### הגדרה - "בעיית הסוכן הנוסע"

נתון גרף מלא ממושקל  $G = (V, E, W)$ . רוצים למצוא מסלול  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$  שעובר בכל קדקד פעם אחת בדיוק והוא בעל משקל מינימלי.

### הערה

מניחים ש  $G$  מקיים את אי שוויון המשולש:

$$w(u, v) + w(v, k) \geq w(u, k)$$

### תרגיל

נתון  $G$  כנ"ל ויהי  $w_{best}$  המשקל של המסלול הטוב ביותר בבעיית הסוכן הנוסע. מצאו אלגוריתם פולינומיאלי שמוצא מסלול המבקר בכל צומת פעם אחת עם משקל  $w \leq 2w_{best}$ .

## פתרון

נשים לב שמסלול אופטימלי של בעיית הסוכן הנוסע  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v_1$  הוא עץ פורש של  $G$  (ללא הקשת האחרונה). לכן הוא ארוך יותר מהעץ הפורש המינימלי:

$$w_{\text{best-tree}} \leq w_{\text{best-route}}$$

נעבור על העץ הפורש המינימלי (שאותו מוצאים בעזרת קרושקל) ב DFS ונשמיט כפילויות. אם נעבור על העץ ב DFS אז נקבל מסלול בו עוברים על כל צומת פעמיים. המשקל שלו יהיה:

$$2w_{\text{best-tree}}$$

כיוון שהגרף מקיים את אי שוויון המשולש, השמטת קדקדים רק מקצרת את המסלול, לכן נקבל מסלול בו כל צומת מופיע פעם אחת שהמשקל שלו קטן או שווה ל:

$$2w_{\text{best-tree}} \leq 2w_{\text{best-route}}$$

## תרגיל

יש חנות המרת מטבעות שממירה בין  $n$  סוגי מטבעות.

מטבע  $i$  מטבע  $j$   $R_{ij}$

כתבו אלגוריתם המקבל את יחסי ההמרה  $\{R_{ij}\}_{i,j=1}^n$  ו:

1. מוצא את הדרך הטובה ביותר להמיר מטבע אחד למטבע אחר.

2. מוצא האם ניתן "לרמות" את חנות ההמרה ולהרוויח כסף.

### הנחה

$$R_{ii} = 1$$

### פתרון

אם עושים המרה של מטבע 1 מטיפוס  $i_1$  באופן הבא:

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_m$$

אז מקבלים  $R_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot R_{i_{m-1} i_m}$  מטבעות מסוג  $i_m$  נגדיר גרף עם צמתים  $\{1, \dots, n\}$  ומשקלים

$$w(i, j) = \ln(R_{ij})$$

כעת המשקל של מסלול  $v_1 v_2 \dots v_m$  הוא

$$\ln(R_{v_1 v_2}) + \ln(R_{v_2 v_3}) + \dots + \ln(R_{v_{m-1} v_m}) = \ln(R_{v_1 v_2} \cdot \dots \cdot R_{v_{m-1} v_m})$$

היות  $\ln$  מונוטונית עולה ממש למצוא את הדרך הטובה ביותר להמיר מטבע  $i$  למטבע  $j$  שקולה למצוא את המסלול הארוך ביותר מ  $i$  ל  $j$ .  
נהפוך את הסימן של קשתות הגרף:

$$w(i, j) = -\ln(R_{ij})$$

ואז זה יהיה שקול למציאת מסלול קצר בגרף.

ייתכן שיש קשתות שליליות. ע"י בלמן-פורד ניתן למצוא מסלול בין שני צמתים ב  $O(n^3)$  - פתרון לא' אם אין מעגלים שליליים.

מעגל שלילי אומר שיש קדקדים  $v_1 v_2 \dots v_n v_1$  כך שמתקיים

$$-\ln(R_{v_1 v_2}) - \ln(R_{v_2 v_3}) - \dots - \ln(R_{v_n v_1}) < 0$$

$$-\ln(R_{v_1 v_2} \cdot \dots \cdot R_{v_n v_1}) < 0$$

$$R_{v_1 v_2} \cdot \dots \cdot R_{v_n v_1} > 1$$

וזה אומר שאפשר לרמות את החנות ולהרוויח כסף ע"י המרת מטבע  $v_1$  בסדר הבא:

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v_1$$

אפשר לגלות את קיום המעגל ע"י בלמן-פורד: הוא מוצא מעגלים שליליים שניתן להגיע אליהם מקדקד המוצא. היות וכל הקשתות קיימות, הגרף קשיר והאלגוריתם ימצא מעגל שלילי מכל נק' התחלה אם קיים כזה. במצב זה, התשובה לסעיף א' היא שאין מסלול אופטימלי, ניתן להרוויח עד אינסוף ע"י חזרה על המעגל השלילי.