שאלה 0.1. חשבו: $\int \frac{x+1}{4+x^2}dx$

פתרון. נפצל את האינטגרל

$$\int \frac{x+1}{4+x^2}dx = \int \frac{x}{4+x^2}dx + \int \frac{1}{4+x^2}dx$$

האינטגרל הראשון: $\int \frac{x}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right) + C$

האינטגרל השני: $\int \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

וסך הכל: $\frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right) + \frac{1}{2}arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$.

שאלה 0.2. תנו קירוב של $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ כך שהשגיאה תהיה קטנה מאלפית.

פתרון. נשתמש בפיתוח טיילור ושארית לגרנז $sinx = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{f^{(2m+3)}(c)}{(2m+3)!}x^{2m+3}$

אז $\frac{sinx}{x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m+1)!} + \frac{f^{(2m+3)}(c)}{(2m+3)!}x^{2m+2}$

ו $\int_{01}^1 \frac{\sin x}{x}dx = \left[x + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \cdots + + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)\cdot(2m+1)!} + \frac{f^{(2m+3)}(c)}{(2m+3)\cdot(2m+3)!}x^{2m+3}\right]_0^1 =$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3\cdot 3!} + \cdots + + \frac{1}{(2m+1)\cdot(2m+1)!}}_{I_{2m+1}} + \frac{f^{(2m+3)}(c)}{(2m+3)\cdot(2m+3)!}$$

ולכן אם נעריך את האינטגרל ע"י I_{2m+1} השגיאה תהיה $\left|\frac{f^{(2m+3)}(c)}{(2m+3)\cdot(2m+3)!}\right| \le \frac{1}{(2m+3)\cdot(2m+3)!}$.

אם רוצים שהשגיאה תהיה קטנה מאלפית אז צריך $m = 2$, כלומר שהקירוב שניקח הוא $I_5 = 1 + \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!}$.