

אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 8

9 בינואר 2021

1. מצאו פתרון כללי של המד"ר הבאות:

$$(א) \quad y' + y \tan x = 0 \quad (\text{הדרכה לאינטגרל: מה זה } \int \frac{f'}{f} \text{?})$$

$$(ב) \quad y' + y \sin x = 0$$

$$(ג) \quad y' + y = xe^x$$

פתרון:

א. זו מד"ר ליניארית הומוגנית עם $a(x) = \tan x$. נמצא תחילה את $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$.
 $A(x) = \int a(x) dx = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ נמצא תחילה את $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$.
 ניזכר בגזירה הבאה:

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'}{f}$$

ולכן $\int \frac{f'}{f} = \ln |f|$. אצלנו נוסיף פעמיים מינוס כדי לקבל את הצורה הזו:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x|$$

קעת נציב בנוסחה: $y = ce^{-A(x)} = ce^{\ln |\cos x|} = c \cdot |\cos x|$

ב. זו מד"ר ליניארית הומוגנית עם $a(x) = \sin x$. הפתרון הוא: $y = ce^{-\int \sin x dx} = ce^{\cos x}$

ג. זו מד"ר ליניארית לא הומוגנית עם $a(x) = 1, b(x) = xe^x$. הפתרון הוא:

$$y = e^{-A(x)} \left(\int b(x)e^{A(x)} dx + c \right) = e^{-x} \left(\int xe^x e^x dx + c \right) = e^{-x} \left(\int xe^{2x} dx + c \right)$$

נפתור את האינטגרל בחלקים:

$$\int xe^{2x} dx = \{f = x, f' = 1, g' = e^{2x} g = \frac{1}{2}e^{2x}\} = \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = e^{2x} \cdot \frac{2x-1}{4}$$

לכן התשובה היא:

$$y = e^{-x} \left(e^{2x} \cdot \frac{2x-1}{4} + c \right) = e^x \cdot \frac{2x-1}{4} + ce^{-x}$$

2. מצאו פתרון פרטי של המד"ר הבאות, עם תנאי ההתחלה המתאימים:

$$(א) \quad \begin{cases} y' + 2xy = 2x \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (\text{הדרכה לאינטגרל: שיטת ההצבה})$$

$$(ב) \quad \begin{cases} y' + \frac{y}{x} = e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x^2} = 0 \\ y(1) = e \end{cases} \quad (ג)$$

פתרון:

א. זו מד"ר ליניארית מסדר ראשון לא הומוגנית. $a(x) = 2x, A(x) = \int a(x) = x^2, b(x) = 2x$. לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = e^{-A(x)} \left(\int b(x)e^{A(x)} dx + c \right) = e^{-x^2} \left(\int 2xe^{x^2} dx + c \right) = \{t = x^2, dt = 2x dx\} = e^{-x^2} \left(\int e^t dt + c \right) = e^{-x^2} (e^t + c)$$

עכשיו נחזיר את ההצבה אחורה ונקבל

$$y = e^{-x^2} (e^{x^2} + c) = 1 + ce^{-x^2}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$1 = 1 + ce^{-1}$$

$$ce^{-1} = 0$$

$$c = 0$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = 1$$

ב. באותו אופן: $b(x) = e^x, A(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x, a(x) = \frac{1}{x}$. לכן: $y = e^{-\ln x} (\int e^x e^{\ln x} dx + c) = \frac{1}{x} (\int x e^x dx + c)$. נפתור את האינטגרל בחלקים:

$$\int x e^x dx = \{f = x, f' = 1, g' = e^x, g = e^x\} = x e^x - \int e^x dx = e^x (x - 1)$$

נחזור לתרגיל:

$$y = \frac{1}{x} (e^x (x - 1) + c) = \frac{c + e^x (x - 1)}{x}$$

נציב תנאי התחלה:

$$0 = \frac{c + e(1 - 1)}{1} = c$$

$$c = 0$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = \frac{e^x (x - 1)}{x}$$

ג. כאן היא הומוגנית עם $A(x) = \frac{1}{x}, a(x) = -\frac{1}{x^2}$, ולכן: $y = ce^{-A(x)} = ce^{-\frac{1}{x}}$. נציב תנאי התחלה:

$$e = ce^{-\frac{1}{1}}$$

$$c = e^2$$

ולכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y = e^{2 - \frac{1}{x}}$$

3. מצאו פתרון פרטי של המד"ר, הבאות עם תנאי ההתחלה המתאימים:

$$\begin{cases} y' = x^3(y-3)^2 \\ y(0) = 4 \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} y' = x^3(y-3)^2 \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} y' = 3y^2 \cos x \\ y(\pi) = 3 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{ד}) \quad \text{(הערה: דרוש } y \neq 0 \text{ בסעיף זה ובסעיף הבא.)}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases} \quad (\text{ה})$$

$$\begin{cases} y' = \frac{\cos^2 y}{x^2+1} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{ו})$$

פתרון:

א. זו מד"ר פרידה.

פתרונות סינגולריים: $y = 3$.

פתרונות רגילים:

$$\frac{dy}{dx} = x^3(y-3)^2$$

$$\frac{dy}{(y-3)^2} = x^3 dx$$

$$\int \frac{dy}{(y-3)^2} = \int x^3 dx$$

$$-\frac{1}{y-3} = \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4 + 4c}{4} = \frac{x^4 + c}{4}$$

(כי $4c$ זה כמו קבוע חדש c). ולכן:

$$y = 3 - \frac{4}{x^4 + c}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$4 = 3 - \frac{4}{c}$$

$$c = -4$$

ב. זו אותה משוואה, אבל כאן תנאי ההתחלה הוא בפתרון הסינגולרי, ולכן הפתרון הוא הסינגולרי: $y = 3$.

ג. פתרונות סינגולריים: $y(x) = 0$.

פתרון כללי:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 \cos x$$

$$\frac{dy}{3y^2} = \cos x dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2} = \int \cos x dx$$

$$\frac{-1}{3y} = \sin x + c$$

$$y = \frac{-1}{3 \sin x + 3c}$$

נציב תנאי התחלה:

$$3 = \frac{-1}{3 \sin \pi + 3c} = -\frac{1}{3c} \Rightarrow c = -\frac{1}{9}$$

ולכן הפתרון הוא:

$$y = -\frac{1}{3 \sin x - \frac{1}{3}}$$

ד+ה. אין פתרונות סינגולריים. נפתור:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$y dy = x dx$$

$$\int y dy = \int x dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y^2 = x^2 + 2c$$

כעת, עבור סעיף (ד) נקבל:

$$\sqrt{2}^2 = 0^2 + 2c \Rightarrow c = 1$$

ולכן

$$y^2 = x^2 + 2$$

ועבור סעיף (ה) נקבל:

$$(-1)^2 = 0^2 + 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$y^2 = x^2 + 1$$

הרחבה לשני סעיפים אלו: נוכל להסתכל על הפתרון הכללי שקיבלנו $y^2 = x^2 + 2c$ כאלו יש שני פתרונות כלליים, שכל אחד מהם נמצא בתחום אחר של המישור: $y = \sqrt{x^2 + 2c}$ נמצא בתחום $y > 0$ ו- $y = -\sqrt{x^2 + 2c}$ נמצא בתחום $y < 0$. בהסתכלות זו, עבור סעיף (ד) נקבל $y > 0$ ולכן נציב זאת במשוואה הראשונה:

$$\sqrt{2} = \sqrt{0^2 + 2c} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 2}$$

עבור סעיף (ה) נקבל $y < 0$ ולכן נציב במשוואה השנייה:

$$-1 = -\sqrt{0^2 + 2c} \Rightarrow 1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{c} \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\sqrt{x^2 + 1}$$

1. פתרונות סינגולריים: $y(x) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

פתרון כללי:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{x^2 + 1}$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} dy = \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 y} = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$\tan y = \arctan x + c$$

$$y = \arctan(\arctan x + c)$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה:

$$0 = \arctan(\arctan 0 + c) = \arctan c \Rightarrow c = 0$$

ולכן:

$$y = \arctan(\arctan x)$$

בהצלחה!