בס״ד

לינארית 2 תרגיל 10 - פתרון

1. ראשית, נשים לב שכל קבוצה אורתונורמלית היא בהכרח בת״ל, כי היא אורתוגונלית, ואין בה את וקטור האפס (הוכחנו בהרצאה)

לכן $\{x_1,\dots,x_n\}$ בת״ל, וניתן להשלים אותם לבסיס של V:

$\{x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m\}$ $\quad m \geq n$

נפעיל גרם-שמידט על הבסיס כדי להפוך אותו לאורתונורמלי, ונשים לב ש $x_1,\dots,x_n$ לא ישתנו בתהליך התהליך כי הם כבר נורמלים, וכל איבר מאונך לכל הקודמים לו.

נקבל בסיס: $B=\{x_1,\dots,x_n,x_{n+1},\dots,x_m\}$

יהי x וקטור כלשהו. $x=\sum \alpha_i x_i$

מכיוון ש B אורתונורמלי: $\langle x,x_i\rangle=\alpha_i \;,\; \forall i$

כעת:

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle=\langle x,\sum \alpha_i x_i\rangle=\sum \overline{\alpha_i}\langle x,x_i\rangle=\sum \alpha_i\cdot\overline{\alpha_i}=$$

$$\sum|\alpha_i|^2=\sum_{i=1}^{m}|\langle x,x_i\rangle|^2\geq\sum_{i=1}^{n}|\langle x,x_i\rangle|^2$$

2. הקבוצה $\{\frac{y}{\|y\|}\}$ היא אורתונורמלית, ולכן:

$$|\langle x,\frac{y}{\|y\|}\rangle|^2\leq\|x\|^2$$

$$|\frac{1}{\|y\|}\langle x,y\rangle|^2\leq\|x\|^2$$

$$|\langle x,y\rangle|^2\leq\|x\|^2\|y\|^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\,\|y\|$$

3. כיוון אחד: אם x ו- y תלויים אז קיים α כך ש $x=\alpha y$

$$|\langle x,y\rangle|=|\langle \alpha y,y\rangle|=|\alpha||\langle y,y\rangle|=|\alpha|\cdot\|y\|^2=$$

$$|\alpha|\cdot\|y\|\cdot\|y\|=\|\alpha y\|\cdot\|y\|=\|x\|\cdot\|y\|$$

כיוון שני: נניח ש- $|\langle x,y\rangle|=\|x\|\cdot\|y\|$

אם x או y שווים ל- 0, אז סיימנו (ברור שהם תלויים)

לכן, נניח $x,y\neq 0$. בפרט: $|\langle x,y\rangle|=\|x\|\cdot\|y\|\neq 0$

נסתכל על $\gamma=\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|}$, שימו לב שאפשר לעשות זאת, כי $|\langle x,y\rangle|\neq 0$

ו- $\alpha=\frac{\gamma\|x\|}{\|y\|}$. נשים לב ש- $\alpha\in\mathbb{F}$

המשך

נרצה להראות ש- $\gamma x-\alpha y=0$

לבדוק רק נכונות ש- $\langle \gamma x-\alpha y, \gamma x-\alpha y\rangle=0$

$$\langle \gamma x-\alpha y, \gamma x-\alpha y\rangle = \gamma\cdot\bar{\gamma}\langle x,x\rangle - \alpha\bar{\gamma}\langle y,x\rangle - \gamma\alpha\langle x,y\rangle + \alpha^2\langle y,y\rangle$$

$$= \|\gamma x\|^2 - \alpha\overline{\gamma\langle x,y\rangle} - \alpha\gamma\langle x,y\rangle + \|\alpha y\|^2 \quad *$$

נשים לב ש- $\gamma\langle x,y\rangle = \frac{\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle}{|\langle x,y\rangle|} = \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{|\langle x,y\rangle|} =$

$|\langle x,y\rangle| \in \mathbb{R}$

לכן $\overline{\gamma\langle x,y\rangle} = \gamma\langle x,y\rangle$

אזי נקבל ש: $* = \|\gamma x\|^2 - 2\cancel{\alpha}|\langle x,y\rangle| + \|\alpha y\|^2$

כעת מכיוון ש $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\|$

מהמשפט ואין שוויון משולש, ניתן לבדוק ש- $|\gamma|=1$

$$* = \|\gamma x\|^2 - 2\|\gamma x\|\,\|\alpha y\| + \|\alpha y\|^2 =$$

$$(\|\gamma x\| - \|\alpha y\|)^2 = (\|\gamma x\| - |\alpha|\,\|y\|)^2 =$$

$$\left(\|\gamma x\| - \frac{\|\gamma x\|}{\|y\|}\cdot\|y\|\right)^2 = 0$$

מש"ל

4. ניתן לבדוק שהבסיס הסטנדרטי $\{1,x,x^2\}$ הוא אורתונורמלי עבור המ"פ הנ"ל

5. א. נפעיל גרם שמידט:

$$v_1=1,\quad v_2=x \quad v_3=x^2$$

$v_1'=1$

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\|v_1'\|^2}\cdot v_1' = x - \frac{\langle x,1\rangle}{\|1\|^2}\cdot 1 = x - 0\cdot 1 = x$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1'\rangle}{\|v_1'\|^2}\cdot v_1' - \frac{\langle v_3, v_2'\rangle}{\|v_2'\|}\cdot v_2' = x^2 - 0\cdot v_1' - 0\cdot v_2' = x^2$$

כעת ננרמל:

$\|1\| = 1 \qquad w_1 = v_1'$

$\|x\| = \sqrt{2} \qquad w_2 = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$\|x^2\| = \sqrt{3} \qquad w_3 = \frac{x^2}{\sqrt{3}}$

ב. $v_1=1,\ v_2=x \quad v_3=x^2$

$v_1'=1$

$$v_2' = x - \frac{\langle x,1\rangle}{\|1\|^2}\cdot 1 = x - \frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

$$v_3' = x^2 - \frac{\langle x^2,1\rangle}{\|1\|^2}\cdot 1 - \frac{\langle x^2, x-\frac{1}{2}\rangle}{\|x-\frac{1}{2}\|^2}\cdot(x-\tfrac{1}{2}) = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}}(x-\tfrac{1}{2}) =$$

$$x^2 - \frac{1}{3} - (x-\tfrac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

וכעת ננרמל $\quad \|1\| = 1 \quad w_1 = 1$

$\|x-\frac{1}{2}\| = \sqrt{\frac{1}{12}} \qquad w_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{12}}} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}$

$\|x^2-x+\frac{1}{6}\| = \sqrt{\int_0^1 (x^2-x+\frac{1}{6})^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{180}} \qquad w_3 = \sqrt{180}\,(x^2-x+\frac{1}{6})$

6. למעשה, מה שצריך לעשות זה להפעיל גראם-שמידט (ואנחנו יודעים שהתכונה הנ"ל מתקיימת)

$V_1 = (i,i,0) \quad V_2 = (0,i,i) \quad V_3 = (i,0,i)$

$V_1' = (i,i,0)$

$V_2' = (0,i,i) - \frac{\overset{1}{\langle (0,i,i),(i,i,0)\rangle}}{\underset{= 2}{\|(i,i,0)\|^2}} (i,i,0) = (0,i,i) - \frac{1}{2}(i,i,0) = (-\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i, i)$

$V_3' = (i,0,i) - \frac{\overset{1}{\langle (i,0,i),(i,i,0)\rangle}}{\underset{= 2}{\|(i,i,0)\|^2}} (i,i,0) - \frac{\overset{\frac{1}{2}}{\langle (i,0,i),(-\frac{1}{2}i,\frac{1}{2}i,i)\rangle}}{\underset{= \frac{3}{2}}{\|(-\frac{1}{2}i,\frac{1}{2}i,i)\|^2}} (-\frac{1}{2}i,\frac{1}{2}i,i) =$

$(i,0,i) - \frac{1}{2}(i,i,0) - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i, i) =$

$(\frac{2}{3}i, -\frac{2}{3}i, \frac{2}{3}i)$

$\|V_1'\| = \sqrt{2} \to w_1 = \frac{(i,i,0)}{\sqrt{2}} = (\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0)$

$\|V_2'\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \to w_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}(-\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i, i)$

$\|V_3'\| = 2 \qquad w_3 = (\frac{i}{3}, -\frac{i}{3}, \frac{i}{3})$