תרגיל בית 11

1. התסתכלו על הפונקציה הבאה המוגדרת על $[-1,1]$:

$$f=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

א. האם הפונקציה גזירה?
ב. האם הפונקציה רציפה ליפשיץ?
ג. האם לפונקציה השתנות חסומה?

פתרון:

א. הפונקציה כמובן גזירה והנגזרת הינה

$$f'=\begin{cases} 2x\sin\left(1/x^2\right)-\frac{2}{x}\cos\left(1/x^2\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

נראה רק כי הפונקציה אכן גזירה ב $x=0$. מתקיים $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\left(1/h^2\right)}{h}=0$

ב. מכיוון שהנגזרת f' איננה חסומה בקטע $[-1,1]$ נובע כי לכל $M,\varepsilon>0$ קיים $-1\le x_0\le 1$ כך ש $f'(x_0)>M+\varepsilon$ מכאן שקיים $h>0$ כך ש $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>M$ ומכאן שהפונקציה איננה רציפה ליפשיץ.

ג. מספיק לבדוק מהן התנודות בין הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת. נשווה את הנגזרת ל 0 ונקבל

$$2x\sin\left(1/x^2\right)-\frac{2}{x}\cos\left(1/x^2\right)=0\Leftrightarrow\tan\left(1/x^2\right)=\frac{1}{x^2}$$

עבור $x\approx 0$ נקבל כי $1/x^2\to\infty$ ולכן פתרונות המשוואה באופן אסימפטוטי יהיו $1/x^2\approx\pi/2+\pi k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$ גדול. מכאן ש $x\approx\sqrt{\frac{2}{\pi+2\pi k}}$ ולכן התנודות סביב הנקודה $x=0$ של הפונקציה יהיו

$$TV(f) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi+2\pi(k+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi(k+1)\right) - \frac{2}{\pi+2\pi k} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi+2\pi 2k} + \frac{2}{\pi+2\pi(2k-1)}$$

ברור כי הטור האחרון מתבדר כמו טור הרמוני ולכן לפונקציה אין השתנות חסומה.

2. הוכיחו על פי **הגדרה** כי פונקציית קנטור איננה רציפה בהחלט

פתרון: בשלב הבנייה ה n של קבוצת קנטור אנחנו נשארים עם קבוצה של קטעים זרים עם גודל כולל של $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ אבל העלייה של פונקציית קנטור על קטעים אלו היא 1...

3. נניח ו f הינה רציפה בהחלט על $[0,1]$ ולכל $A \subseteq [0,1]$ נגדיר $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.
הראו כי אם A הינה בעלת מידת לבג 0 אזי $f(A)$ בעלת מידת לבג 0.

פתרון: מכיוון ש f רציפה בהחלט נובע כי היא בעלת השתנות חסומה ולכן ניתן לפרק אותה להפרש של שתי פונקציות עולות. מכיוון ש f רציפה בהחלט, ניתן להראות כי $f = f_1 - f_2$ כאשר f_1, f_2 רציפות בהחלט ועולות. מכיוון ש $m(A)=0$ נובע כי נוכל למצוא קבוצה פתוחה $A \subseteq O$ כך ש $m(O) < \varepsilon$. נוכל לרשום $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר $\{I_n\}$ קטעים זרים. מכיוון ש f_1 הינה פונקציה עולה נובע כי $\{f_1(I_n)\}$ הינם קטעים(אולי טריויאלים) זרים (אולי פרט לנקודון) וכי

$$m(f_1(A)) \le m\left(\bigcup_i f_1(I_i)\right) \Leftarrow f_1(A) \subseteq \bigcup_i f_1(I_i)$$

מכיוון ש f_1 עולה ורציפה ברור כי המידה של תמונה של קטע (x_1, x_2) תהיה $f(x_2) - f(x_1)$
נסמן $I_n = (a_n, b_n)$, f_1 רציפה בהחלט ולכן קיימת הנגזרת $f_1{}'$ וכן
$\int_{a_i}^{b_i} f_1{}' dm = f_1(b_i) - f_1(a_i)$.

$$m\left(\bigcup_i f_1(I_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(f(I_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} f_1(b_i) - f_1(a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} f_1{}' dm$$
$$= \int_O f_1{}' dm$$

כאשר השיוון האחרון נובע מכך ש $f' \ge 0$ כב"מ. מכאן ש

$$m(O) \to 0 \Rightarrow \int_O f_1{}' dm \to 0$$

ומכאן ש $m\left(f_1(O)\right)\to 0$. באותו אופן נראה כי $m\left(f_2(O)\right)\to 0$. נסמן ב $f_1(I_i)=\left(a_i^1,b_i^1\right),\ f_2(I_i)=\left(a_i^2,b_i^2\right)$ ונשים לב כי

$$f\left((a_i,b_i)\right)\subseteq\left(b_i^1-a_i^2,a_i^1-b_i^2\right)$$
$$\Rightarrow m\left(f\left((a_i,b_i)\right)\right)\le b_i^1-a_i^2-\left(a_i^1-b_i^2\right)=m\left(f_1\left((a_i,b_i)\right)\right)+m\left(f_2\left((a_i,b_i)\right)\right)$$
$$\Rightarrow m\left(f(A)\right)\le m\left(f(O)\right)\le m\left(f_1(O)\right)+m\left(f_2(O)\right)\underset{m(O)\to 0}{\to}0$$

מכאן ש $m\left(f(A)=0\right)$. מש"ל.