חשבון אינפי 1

תרגיל 10-פתרון

1. השתמשו בהגדרת הנגזרת על מנת לחשב את:

א. $f'(-1)$ כאשר $f(x)=5x^3-8x$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{5x^3-8x-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(5x^2-5x-3)}{(x+1)}=\lim_{x\to -1}(5x^2-5x-3)=7$$

ב. $f'(x_0)$ כאשר $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{x}-\frac{1}{x_0}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x_0-x}{x\cdot x_0(x-x_0)}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{-1}{x\cdot x_0}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=-\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

ג. $f'(1)$ כאשר $f(x)=\sqrt[3]{x}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{3}$$

ד. $f'(x_0)$ כאשר $f(x)=x^{3/2}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^{3/2}-x_0^{3/2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x^{3/2}-x_0^{3/2})(x^{3/2}+x_0^{3/2})}{(x-x_0)(x^{3/2}+x_0^{3/2})}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x^3-x_0{}^3)}{(x-x_0)(x^{3/2}+x_0^{3/2})}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{(x-x_0)(x^{3/2}+x_0^{3/2})}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x^2+xx_0+x_0^2)}{(x^{3/2}+x_0^{3/2})}=\frac{3x_0^2}{2x_0^{3/2}}=\frac{3}{2}x_0^{1/2}$$

ה. $f'(0)$ כאשר $f(x)=\left|e^{x^2}-1\right|$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|e^{x^2}-1\right|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\left|e^{x^2}-1\right|}{x}\underset{e^{x^2}\ge 1}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}_{\to 1}\cdot x=0$$

2. גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

$$\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\left(\frac{2x\left(1-x^2\right)+2x\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2} = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$$

ב. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$

$$\left(e^{\sqrt{\ln x}}\right)' = e^{\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}$$

ג. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$

$$\ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$f'(x) = f(x)\left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)+\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)+\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}\right)$$

ד. $$\left(\sqrt{2^{\frac{1}{x}}}\right)' = \left(e^{\ln\sqrt{2^{\frac{1}{x}}}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{2x}\ln 2}\right)' = \sqrt{2^{\frac{1}{x}}}\left(-\frac{\ln 2}{2x^2}\right)$$

ה. $$\left(|x|\sin x\right)' = \begin{cases}\left(x\sin x\right)' & x\ge 0\\ \left(-x\sin x\right)' & x<0\end{cases} = \begin{cases}\sin x + x\cos x & x\ge 0\\ -\sin x - x\cos x & x<0\end{cases}$$

ו. $f(x) = \left(\sqrt{2x+1}\right)^{\ln\frac{1}{x}}$

$$\ln f(x) = \ln\frac{1}{x}\ln\left(\sqrt{2x+1}\right) = \left(-\ln x\right)\cdot\frac{1}{2}\ln\left(2x+1\right)$$

$$\ln f(x) = -\frac{1}{2}\cdot\left(\ln x\right)\cdot\left(\ln\left(2x+1\right)\right)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\ln\left(2x+1\right)+\frac{2}{2x+1}\ln x\right)$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{2x+1}\right)^{\ln\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{2x}\ln\left(2x+1\right)-\frac{\ln x}{2x+1}\right)$$

3. תהי

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{ax} & x\ne 0\\ b & x=0\end{cases}$$

מצאו את הקבועים a ו- b אם נתון $f'(0)=2$

פתרון:

נתון שהפונקציה גזירה בנקודה $x=0$ ולכן $f(x)$ רציפה ב- $x=0$, ז"א

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{ax} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}}_{\to 1} \cdot \frac{x}{a} = 0 = f(0) = b$$

מצאנו ש- $b=0$.

נחשב נגזרת לפי הגדרה

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{ax} - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{ax^2} = \frac{1}{a}$$

נתון $f'(0)=2$ ולכן $\frac{1}{a}=2$ ומכאן $a=\frac{1}{2}$.

לסיכום: $b=0$, $a=\frac{1}{2}$