מבוא לאנליזה מתקדמת תרגול 9 תשפ"א

22 בדצמבר 2020

1 טריגו

נגדיר שתי פונקציות:

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

ניזכר:

$$e^{x+iy}=e^{x}\text{cis}y$$

חשבו:

1. $\sin(\pi)=\frac{e^{i\pi}-e^{-i\pi}}{2i}=\frac{e^{0}\text{cis}(\pi)-e^{0}\text{cis(-}\pi)}{2i}=\frac{-1-(-1)}{2i}=0$
2. $\cos(\pi i)=\frac{e^{i\cdot\pi i}+e^{-i\cdot\pi i}}{2}=\frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{2}$
3. $\cos(1+i)=\frac{e^{i(1+i)}+e^{-i(1+i)}}{2}=\frac{e^{-1+i}+e^{1-i}}{2}=\frac{e^{-1}\text{cis}(1)+e^{1}\text{cis}(-1)}{2}$

$$=\frac{e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)+e(\cos(-1)+i\sin(-1))}{2}=$$

$$=\frac{e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)+e(\cos 1-i\sin 1)}{2}=\frac{\cos 1(e^{-1}+e)+i\sin 1(e^{-1}-e)}{2}=$$

$$=\underbrace{\frac{\cos 1(e^{-1}+e)}{2}}_{Re}+i\underbrace{\frac{\sin 1(e^{-1}-e)}{2}}_{Im}$$

.4

$$\sin(1+i)=\frac{e^{i(1+i)}-e^{-i(1+i)}}{2i}=\frac{e^{-1+i}-e^{1-i}}{2i}=\frac{e^{-1}\text{cis}1-e\text{cis}(-1)}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)-e(\cos(-1)+i\sin(-1))}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-1}(\cos 1+i\sin 1)-e(\cos 1-i\sin 1)}{2i}=\frac{\cos 1(e^{-1}-e)+i\sin 1(e^{-1}+e)}{2i}=$$

$$=\frac{\cos 1(e^{-1}-e)}{2i}+\frac{i\sin 1(e^{-1}+e)}{2i}=\frac{\sin 1(e^{-1}+e)}{2}+\frac{-2i\cos 1(e^{-1}-e)}{2i(-2i)}$$

$$=\frac{\sin 1(e^{-1}+e)}{2}+\frac{-2i\cos 1(e^{-1}-e)}{4}=\underbrace{\frac{\sin 1(e^{-1}+e)}{2}}_{Re}+i\underbrace{\frac{-\cos 1(e^{-1}-e)}{2}}_{Im}$$

הוכיחו:

.1 $\sin(z+w)=\sin z\cos w+\cos z\sin w$

פתרון: נפתח את צד שמאל:

$$\sin(z+w)=\frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i}=\frac{e^{iz+iw}-e^{-iz-iw}}{2i}=\frac{e^{iz}e^{iw}-e^{-iz}e^{-iw}}{2i}$$

נפתח את צד ימין:

$$\sin z\cos w+\cos z\sin w=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}=$$

$$=\frac{1}{4i}\left(e^{iz}e^{iw}+e^{iz}e^{-iw}-e^{-iz}e^{iw}-e^{-iz}e^{-iw}+e^{iz}e^{iw}-e^{iz}e^{-iw}+e^{-iz}e^{iw}-e^{-iz}e^{-iw}\right)=$$

$$=\frac{1}{4i}\left(2e^{iz}e^{iw}-2e^{-iz}e^{-iw}\right)=\frac{e^{iz}e^{iw}-e^{-iz}e^{-iw}}{2i}$$

פיתחנו את שני הצדדים והגענו לביטוי זהה, ולכן הם שווים.

.2 הוכיחו: $(\cos z)'=-\sin z$

פתרון: ניזכר שראינו $(e^z)'=e^z$, ולכן:

$$(\cos z)'=\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)'=\frac{1}{2}(e^{iz}\cdot i+e^{-iz}\cdot(-i))$$

נכפיל מונה ומכנה ב-i:

$$\frac{1}{2i}(-e^{iz}+e^{-iz})=-\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin z$$

2 חזקות

כדי לחשב את החזקה z^w אנחנו משתמשים בטריק:

$$z^w = e^{\ln(z^w)} = e^{w \ln z}$$

חשבו, ומצאו ערך עיקרי:

1. $(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\ln(1+i)}$. נחשב את $\ln_{\mathbb{C}}(1+i)$:

$$e^x \text{cis} y = e^{x+yi} = 1+i = \sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4}$$

לכן:

$$\begin{cases} e^x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \ln\sqrt{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

לכן נקבל: $\ln_{\mathbb{C}}(1+i) = \ln\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4} + 2\pi k)i$, כאשר הענף העיקרי מתקבל עבור $k=0$ כי $\frac{\pi}{4} \in (-\pi, \pi]$. נחזור לשאלה:

$$(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\ln(1+i)} = e^{(1+i)\left(\ln\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4}+2\pi k)i\right)} =$$

נחשב את המעריך:

$$(1+i)\left(\ln\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4} + 2\pi k)i\right) = \ln\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4} + 2\pi k)i + i\ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

$$= \ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4} + 2\pi k) + i(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

ולכן:

$$= e^{\ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4}+2\pi k) + i(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)} = e^{\ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4}+2\pi k)} \text{cis}(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

זו התשובה (זהו מספר מרוכב בהצגה פולרית: $r = e^{\ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4}+2\pi k)}, \theta = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$. התשובה בענף העיקרי היא:

$$e^{\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}} \text{cis}(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4})$$

2. $(0.5+i)^{2-3i}$.

פתרון:

$$(0.5+i)^{2-3i} = e^{\ln_{\mathbb{C}}\left((0.5+i)^{2-3i}\right)} = e^{(2-3i)\ln_{\mathbb{C}}(0.5+i)}$$

נחשב בצד את הלוגריתם:

$$e^x \text{cis} y = e^{x+yi} = 0.5 + i = \sqrt{1.25}\text{cis}1.107$$

לכן נקבל:

$$\begin{cases} e^x = \sqrt{1.25} \Rightarrow x = \ln\sqrt{1.25} \\ y = 1.107 + 2\pi k \end{cases}$$

ולכן:

$$\ln_{\mathbb{C}}(0.5+i) = \ln\sqrt{1.25} + i(1.107 + 2\pi k)$$

והענף העיקרי מתקבל עבור $k = 0$. עכשיו נחזור לתרגיל:

$$e^{(2-3i)\ln_{\mathbb{C}}(0.5+i)} = e^{(2-3i)(\ln\sqrt{1.25}+i(1.107+2\pi k))}$$

נחשב את המעריך:

$$(2-3i)(\ln\sqrt{1.25} + i(1.107 + 2\pi k)) =$$

$$= 2\ln\sqrt{1.25} + 3(1.107 + 2\pi k) + i\left(2(1.107 + 2\pi k) - 3\ln\sqrt{1.25}\right)$$

ועכשיו נוכל להמשיך:

$$e^{(2-3i)(\ln\sqrt{1.25}+i(1.107+2\pi k))} = e^{2\ln\sqrt{1.25}+3(1.107+2\pi k)+i\left(2(1.107+2\pi k)-3\ln\sqrt{1.25}\right)} =$$

$$= e^{2\ln\sqrt{1.25}+3(1.107+2\pi k)}\text{cis}(2(1.107 + 2\pi k) - 3\ln\sqrt{1.25})$$

זו התשובה הכללית (כלומר, אינסוף אפשרויות). הענף העיקרי:

$$e^{2\ln\sqrt{1.25}+3.321}\text{cis}(2.214 - 3\ln\sqrt{1.25})$$

אם נתבקש למצוא את התשובה עבור התחום $[3\pi, 5\pi)$ אז נצטרך $k = 2$ ונקבל:

$$e^{2\ln\sqrt{1.25}+3.321+12\pi}\text{cis}(2.214 + 8\pi - 3\ln\sqrt{1.25})$$