פתרון תרגיל בית 4 - אלגברה מופשטת 2

1. יהי $\varphi\colon R\to S$ הומומורפיזם (עם יחידה). הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

(א) אם $R \lhd I$ אידיאל אז $\varphi(I) \lhd S$ אידיאל.
דוגמא נגדית: $\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{R}$ שיכון ההכלה. התמונה של כל אידיאל זה לא אידיאל כי בשדות אין אידיאלים.

(ב) אם $I \lhd S$ אידיאל אז $\varphi^{-1}(I) \lhd R$ אידיאל.
נכון: ידוע שזה ת"ח חיבורית ממופשטת 1.
עבור $r\in R$ ו־$x\in\varphi^{-1}(I)$
$\varphi(rx)=\varphi(r)\underbrace{\varphi(x)}_{\in I}\in I$ ולכן $rx\in\varphi^{-1}(I)$.

(ג) אם $I \lhd R$ אידיאל ו־φ אפימורפיזם, אז $\varphi(I) \lhd S$ אידיאל.
נכון: זו אכן חבורה חיבורית.
עבור $s\in S$ ו־$\varphi(i)\in\varphi(I)$, מכיוון ש־φ הוא על $s=\varphi(r)$ לאיזשהו $r\in R$.
ולכן $s\varphi(i)=\varphi(r)\varphi(i)=\varphi(\underbrace{ri}_{\in I})\in\varphi(I)$ ובאופן דומה מראים בליעה מהצד השני.

(ד) אם $I \lhd S$ אידיאל ו־φ אפימורפיזם, אז $\varphi^{-1}(I) \lhd R$ אידיאל.
מקרה פרטי של סעיף ב.

2. עבור חוג R ואידיאל $I \lhd R$ הוכיחו כי: $M_n(R)/M_n(I)\cong M_n(R/I)$.
נתבונן בפונקציה $M_n(R)\to M_n(R/I)$ המוגדרת ע"י $(a_{ij})\mapsto(a_{ij}+I)$.
קל לראות שזהו אכן הומומורפיזם, ואפילו אפימורפיזם (השלימו את הפרטים).
הגרעין הוא בדיוק $M_n(I)$ ולכן נקבל את האיזומורפיזם הדרוש ממשפט האיזו' הראשון.

3. הוכיחו $\mathbb{C}[x,y]/\langle xy-1\rangle\cong\mathbb{C}[x,y]/\langle x^2+y^2-1\rangle$.
פתרון:

נתבונן בפונקציה $f:\mathbb{C}[x,y]/\langle xy-1\rangle \to \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2+y^2-1\rangle$ המוגדרת ע"י

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) &= \overline{x+iy} \\ f(\overline{y}) &= \overline{x-iy} \end{aligned}$$

זהו הומומורפיזם שכן $f(\overline{x})f(\overline{y}) = \overline{(x+iy)(x-iy)} = \overline{x^2+y^2} = \overline{1} = f(\overline{1}) =$ $f(\overline{xy})$ וגם $f(\overline{x})f(\overline{y}) = f(\overline{y})f(\overline{x})$.

אפשר לבנות את הפונקציה ההפוכה $g(\overline{x}) = \dfrac{x+y}{2}$ ו $g(\overline{y}) = \dfrac{x-y}{2i}$ ולראות שזה גם הומומורפיזם.

4. יהי R חוג מקומי, ויהי $f:\ R\to S$ אפימורפיזם. הוכיחו כי S הוא חוג מקומי.

פתרון:

ראינו שתחת אפימורפיזם, אידיאלים מקסימליים הולכים לאידיאלים מקסימלים,
וכל אידיאל מקסימלי הוא מקור של אידיאל מקסימלי.
ולכן עם לR יש אידיאל מקסימלי יחיד, גם לS יש יחיד כזה.

5. הוכיחו כי החוגים $R=\mathbb{F}_p[x]/\langle x^2\rangle$ ו $S=\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ הם חוגים מקומיים (כאשר $\mathbb{F}_p$ הוא השדה היחיד מעצמה p).

הראו שעצמת החוגים שווה, ועצמת האידיאלים המקסימליים שלהם שווה, וכן שני האידיאלים המקימליים נוצרים ע"י איבר שריבועו הוא 0- ובכל זאת הם לא איזומורפיים.

ראינו בתרגול שאם $M\ \lhd\ R$ אידיאל מקסימלי אז R/M^n הוא מקומי עם אידיאל מקסימלי M/M^n.

ולכן נובע ששני החוגים הנ"ל מקומיים והאידיאלים המקסימליים הם $\langle x\rangle/\langle x^2\rangle$ ו $p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ בהתאמה.

שני החוגים הם מעצמה p^2 והאידיאלים המקסימליים הם מעצמה p. כמו כן היוצרים מקיימים $\overline{x}^2=\overline{0}$ ו $\overline{p}^2=\overline{0}$.

אבל למרות כל זאת החוגים לא איזומורפיים כי למשל המאפיין שלהם שונה.

6. ראיתם בהרצאה, עבור קבוצה X, את החוג $(P(X),\triangle,\cap)$ - זהו חוג בוליאני (= חוג שבו כל האיברים הם אידמפוטנטיים). בתרגיל זה נוכיח את הכיוון ההפוך: כל חוג בוליאני A משוכן בחוג מהצורה $P(X)$ עבור איזושהי קבוצה X.

(א) הזכרו שראינו בתרגיל קודם שכל חוג בוליאני הוא קומוטטיבי ומקיים $a+a=0$ לכל $a\in A$.

(ב) הוכיחו כי השדה היחיד שהוא גם חוג בוליאני הוא $\mathbb{Z}_2$.

בכל שדה האיברים האידמפוטנטים היחידים הם $0,1$ ולכן שדה בוליאני לא יכול להכיל יותר איברים.

(ג) הוכיחו כי המנה A/M איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2$ לכל אידיאל מקסימלי אמיתי M.
מכיוון שM מקסימלי, המנה A/M היא שדה. ומכיוון שמנה של חוג בוליאני הוא בוליאני- המנה היא שדה בוליאני, ולכן לפי הסעיף הקודם $A/M \cong \mathbb{Z}_2$.

(ד) יהי A חוג בוליאני ויהי $a \in A$. הוכיחו כי כל אידיאל מקסימלי של A מכיל את a או את $1-a$ ואף פעם לא את שניהם.

נניח ש$A \vartriangleleft M$ אידיאל מקסימלי ו $a \notin M$ אזי $\bar{a} \in A/M$ $\bar{0} \neq$. ולפי הסעיף הקודם $A/M = \{\bar{0}, \bar{a} = \bar{1}\}$.
אם כן, $\overline{1-a} = \bar{0}$ מה שאומר ש $1-a \in M$.
ברור שלא ייתכן ששני האיברים שייכים לאידיאל כי אז $1 = (1-a) + a \in I$
מה שאומר ש$A = M$ ולא מקסימלי.

(ה) יהי $0 \neq a \in A$. הוכיחו כי קיים אידיאל מקסימלי M שלא מכיל את a.
ראשית נעיר שאם $1 \neq a$ אז a ו $1-a$ לא הפיכים שכן $a(1-a) = a - a = 0$.
כעת, אם נקח את האידיאל המקסימלי שמכיל את $\langle 1-a \rangle$ (שהוא אידיאל אמיתי כי $1-a$ לא הפיך), הוא בהכרח לא מכיל את a לפי הסעיף הקודם.

(ו) תהא X הקבוצה של כל האידיאלים המקסימליים. הוכיחו כי ההעתקה

$$\varphi \colon A \longrightarrow P(X)$$

השולחת כל איבר לקבוצת כל האידיאלים המקסימליים שלא מכילים אותו, היא שיכון של חוגים.

<u>ראשית נראה שזהו הומומורפיזם</u>:
<u>חיבוריות</u>:
נשים לב ש$a + b \notin M \Rightarrow a \notin M \ \vee b \notin M$ מה שאומר ש

$$\varphi\left(a+b\right) = \{M \,|\, a+b \notin M\} \subseteq \{M \,|\, a \notin M\} \cup \{M \,|\, b \notin M\} = \varphi(a) \cup \varphi(b)$$

.
נניח $a, b \notin M$ אזי לפי סעיף קודם $1-a, 1-b \in M$
ולכן $a + b = (1-a) + (1-b) \in M$ (שימו לב לסעיף הראשון). וזה משלים ש

$$\varphi\left(a+b\right) \subseteq \varphi(a) \triangle \varphi(b)$$

את ההכלה ההפוכה מקבלים בקלות, נניח $a \in M$, $b \notin M$,
אז בהכרח $a + b \notin M$ כי אחרת $b = (a+b) - a \in M$.

כפליות:

נשים לב שאם M $ab \notin M$ אז $a \notin M \wedge b \notin M$ (כי M הוא אידיאל) ולכן

$$\varphi(ab) = \{M \mid ab \notin M\} \subseteq \{M \mid a \notin M\} \cap \{M \mid b \notin M\} = \varphi(a) \cap \varphi(b)$$

בכיוון שני, יהיו $a, b \notin M$ ונניח בשלילה ש $ab \in M$. [הערה: אם אתם כבר יודעים מה זה אידיאל ראשוני, אז מספיק לדעת שכל מקסימלי הוא ראשוני ומכאן יש סתירה...]

לפי הסעיפים הקודמים $(1-a), (1-b) \in M$

ולכן $(1-a)(1-b) = 1 + a + b + ab \in M$.

אך $ab \in M$ מהנחת השלילה ו$a + b \in M$ (כפי שראינו שהוכחנו חיבוריות)

ולכן $1 \in M$ בסתירה לכך שM מקסימלי.

יחידה:

$\varphi(1) = \{M \mid 1 \notin M\} = X$ כי כל אידיאל מקסימלי לא מכיל את היחידה.

כעת נראה שזהו שיכון:

נניח $a \neq b \in A$ שונים מ1. נקח את האידיאל המקסימלי M שמכיל את האידיאל $\langle 1-b, a \rangle$,

הוא מכיל את a ולא את b ולכן $M \in \varphi(b)$ ו $M \notin \varphi(a)$.

ואם נסתכל על $M \in 1, a$ ונקח אידיאל מקסימלי M שמכיל את a

אז $M \in \varphi(1)$ אבל $M \notin \varphi(a)$.