

# אלגברה מופשטת 1

## פתרון (חלקי) מועד א' קיץ תשס"ז

### שאלה 2.

א. ראה בתרגול האחרון.

ב. כנ"ל.

ג. למשל:  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ . קל לראות שזו אכן תת-חבורה (הוכח!).

והיא אכן אינה נורמאלית. למשל אם:  $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  נקבל:

$$gH = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ לעומת: } Hg = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a+1 & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ד. שלוש תתי חבורות נורמאליות:

$$1. \text{ הנגזרת: } G' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad 2. \text{ עצמה } G \quad 3. \text{ היחידה: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### שאלה 3.

א. במועד א' תשס"ו הראינו מדוע  $p \mid (p-1)! + 1$  עבור ראשוני. במקרה שלנו  $p = 71$  הוא

מספר ראשוני ולכן הטענה הראשונה נכונה. במקרה השני קל לראות כי:  $117 = 9 \cdot 13$ .

וכיוון ש:  $9, 13 < 116$  אז ברור ש:  $117 \mid 116!$ . אבל שני מספרים עוקבים הם בהכרח זרים:

$$1 = (116!, 116! + 1) \text{ על כן לא יתכן ש-} 117 \text{ יהיה מחלק משותף, כלומר: } 117 \nmid 116! + 1.$$

ב. עפ"י אוילר:  $1(100) \equiv 53^{\varphi(100)=40} \pmod{100} \Rightarrow (53, 100) = 1$  לכן:  $77(100) \equiv 53^3(100) \pmod{100}$ .

ג. לא, הן אינן איזומורפיות:  $U_{10} = \langle 3 \rangle$  היא ציקלית בעוד ש- $U_8$  אינה כזו.

ד. כיוון שהיחס בין הזווית של המספר המרוכב היוצר לבין  $\pi$  אינו מספר רציונאלי, החבורה היא

ציקלית אינסופית ואיזומורפית ל- $\mathbb{Z}$  שבה יש שני אוטומורפיזמים.

#### שאלה 4.

א. ראה תרגיל בית מס' 6 שאלה 4 סעיף א.

ב. ראה תרגיל בית מס' 6 שאלה 4 סעיף ב.

ג. נגדיר את קבוצת כל תתי החבורות ב- $G$ :  $A = \{H \mid H \leq G\}$  ונגדיר פעולה של  $G$  על  $A$  ע"י

$$\text{הצמדה: } \forall g \in G, H \in A: g * H = gHg^{-1}.$$

קל להוכיח שזו אכן פעולה (צריך להראות שני תנאים).

נשים לב כי:  $\{gHg^{-1} : g \in G\} = G_H$  (המסלול של  $H$  תחת פעולת ההצמדה).

על כן:  $|\{gHg^{-1} : g \in G\}| = |G_H| = [G : \text{Stb}(H)]$ . וברור מההגדרה כי:  $\text{Stb}(H) = N(H)$ .

ד. ראה תרגיל בית מס' 6 שאלה 2 סעיף ג.