סיכום בנושא של דיפרנציאביליות ונגזרות כיווניות

25 בדצמבר 2016

תזכורת:

תהי $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0. f גזירה חלקית לפי משתנה x_i בנקודה $x_0=\left(x_0^1,x_0^2,...,x_0^n\right)$, אם קיים הגבול :
$lim_{h_i\to0}\frac{f\left(x_0^1,x_0^2,...,x_0^i+h_i,...x_0^n\right)-f\left(x_0^1,x_0^2,..,x_0^n,\right)}{h_2}$. גבול זה אם הוא קיים נקרא הנגזרת החלקית של f לפי x_i.

פירוש הגיאומטרי לנגזרות חלקיות של פונקציה של שני משתנים מתקבל באופן הבא: כידוע, פונקציה של שני משתנים, $f\left(x,y\right)$ המוגדרת בסביבה של , ניתנת בדרך כלל לתיאור ע"י משטח $z=f\left(x,y\right)$. הפונקציה $\phi\left(x\right)=f\left(x,y_0\right)$ מתארת את העקומה המתקבלת מחיתוך המשטח $z=f\left(x,y\right)$עם המישור $y=y_0$. הנגזרת החלקית לפי x של f בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ היא שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה $\phi\left(x\right)$ בנקודה x_0, שאינו אלא השיפוע הישר המשיק בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ לעקומה שתוארה לעיל, כאשר המשיק מונח גם הוא במישור $y=y_0$. הסבר דומה אפשר לתת לנגזרת לפי y.

הערה:

קודם כל חשוב להדגיש שמושג הדיפרציאביליות מהווה הכללה של מושג הגזירות של פונקציה במשתנה 1, יש לנו צורך במושג כזה כי נגזרות חלקיות לא יכולות להיות הכללה של מושג הגזירות של פונקציה בכמה משתנים כי פונקציה שגזרה חלקית לפי כל אחד מהמשתנים אינה בהכרח רציפה בנקודה,

למשל: $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\\ 0 & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$.

קל לראות לפי ההגדרה שהנגזרות החלקיות של f בראשית הצירים קיימות ומתאפסות , אבל ראיתם בבית ש־f אינה רציפה ב־$\left(0,0\right)$.

תזכורת:

תהי $f(x,y)$ מוגדרת בסביבה של (x_0,y_0). נאמר ש־f דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם אפשר להציג אותה בצורה הבאה:

$$f(x_0+h_1,y_0+h_2)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)h_1+f_y(x_0y_0)h_2+\epsilon\left\|(h_1,h_2)\right\|$$

כאשר $\epsilon\to 0$.

משפט:

תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה (x_0,y_0). אם f דיפרנציאבילית בנקודה אזי היא רציפה שם.

לדוגמה: פונקציה מהדוגמה הקודמת

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & otherise\end{cases}$$

היא פוקציה לא רציפה בראשית הצירים ולכן לא דיפרנציאבילית.

משפט (תאי מספיק לדיפרנציאביליות)

תהי f פונקציה סקלרית רציפה בסביבת הנקודה x_0, נאמר ש־f דיפרנציאבילית בנקודה אם קיימות הנגזרות החלקיות של f בסביבת הנקודה הזו והן רציפות בה.

למשל: פולינום בכמה משתנים הוא פונקציה דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^n$ כי הנגזרות החלקיות שלו קיימות ורציפות בכל $\mathbb{R}^n$.

הערה:

תנאי זה אינו הכרחי,

למשל:
$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

פונקציה זא בעלת נגזרות חלקיות לא רציפות אבל היא כן דיפרנציאבילית.

לסיכום:

קיום ורציפות של נגזרות החלקיות גורר דיפרנציאביליות

דיפרנציאביליות גוררת רציפות של פונקציה וקיום של נגזרות החלקיות אך לא להיפך.

נגזרת כיוונית

הגדרה:

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה, נגדיר את הנגזרת הכיוונית של f בכיוון של וקטור h בנקודה a להיות:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a)=lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\cdot h)-f(a)}{t}$$

ואם פונקציה דיפרנציאבילית אזי מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a)=\nabla f(a)\cdot h=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)\cdot(h_1,h_2,...,h_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot h_n \quad (*)$$

הערה:

אם f דיפרנציאבילית בנקודה a אזי הנגזרת הכיוונית היא מקסימלית בכיוון וקטור הגרדיאנט המנורמל. כדי לראות את זה נזכר בנוסחה שראינו בתרגול הקודם:

$<u,v>=\|u\|\,\|v\|\,cos\theta$ כאשר u,v הם וקטורים ב־$\mathbb{R}^n$ (זוהי הגדרה גיאומטרית של מכפלה סקלרית של שני וקטורים כאשר θ הזווית שבינהם). הביטוי הזה מקבל מקסימום כאשר $cos\theta=1$ כלומר כאשר $\theta=0$ כלומר מקבלים שמכפלה סקלרית מקבלת ערך מקסימלי כאשר הזווית בין שני הוקטורים היא אפס כלומר כאשר הם נמצאים על אותו קו ישר, בנוסף מכפלה סקלרית היא חיובית כאשר $cos\theta=1$ ולכן שני הוקטורים u,v הם באותו כיוון, ולכן הם תלויים לינארית כלומר האחד הוא כפולה של השני.

בנוסף יש לנו נוסחה אלגברית עבור מכפלה סקלרית: $<u,v>=u_1\cdot v_1+u_1\cdot v_2+\cdots+u_n\cdot v_n$

נניח עכשיו שפונקציה f היא דיפרנציאבילית בנקודה a ולכן לפי הגדרה הקודמת ניתן לכתוב את הנגזרת הכיוונית שלה בכיוון $\bar{h}=(h_1,h_2,...,h_n)$ בנקודה a בצורה הבאה:

$\frac{\partial f}{\partial h}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot h_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot h_n$, המטרה שלנו היא למצוא באיזה כיוון הנגזרת תהיה מקסימלית, מקודם הוסבר שהיא תהיה מקסימלית אם שני וקטורים הם באותו כיוון, כלומר $\bar{h}$ ו־$\nabla f(a)$ הם תלויים לינארית כלומר כאשר אחד הוא כפולה של השני: $\bar{h}=\lambda\nabla f(a)$. אורך של $\bar{h}$ לא חשוב לנו אלא מה שחשוב זה הכיוון ולכן ניתן לבחור את $\bar{h}$ להיות וקטור יחידה בכיוון הגרדיאנט או במילים אחרות הגרדיאנט המורמל: $\bar{h}=\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$, ולכן

$\frac{\partial f}{\partial h}(a)=\nabla f(a)\cdot\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}=\|\nabla f(a)\|$. באותו אופן בדיוק קל לראות שהנגזרת תהיה מינימלית בכיוון וקטור $-\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ והערך של הנגזרת בכיוון זה הוא $-\|\nabla f(a)\|$.

הערה חשובה: לא ניתן להשתמש בנוסחה $(*)$ כאשר פונקציה אינה דיפרנציאבילית.

למשל: ראינו בכיתה את הגודמה הבאה: $f(x,y)=\sqrt[3]{xy^2}$ פונקציה זו אינה דופרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ ונראה שאין שוויון בין הנגזרת לפי ההגדרה בנקודה $(0,0)$ בכיוון של $(1,1)$ לבין הנוסחה ב־$(*)$:

ראינו בתרגול שבראשית הצירים הנגזרות החלקיות של f נתאפסות ולכן $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=\nabla f(a)\cdot h=0$ ולכל וקטור הכיוון h ולכן זה נכון גם עבור $h=(1,1)$, מצד שני אם נגזור לפי ההגדרה את f ב־$(0,0)$ אזי נקבל:

$\frac{\partial f}{\partial h}(0,0)=lim_{t\to0}\frac{f((0,0)+t(1,1))-f(1,1)}{t}=lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{(x-t)(y-t)^2}-1}{t}=-\infty$ ולכן לא מתקיים כאן שוויון בין נגזרת כיוונית לפי ההגדרה לנוסחה $(*)$.

הערה נוספת:

נגזרות חלקיות הן מקרה פרטי של נגזרות כיווניות, כלומר נגזרות חלקיות הן נגזרות כיווניות בכיוון הצירים, נגזרת חלקית לפי x היא נגזרת כיוונית בכיוון ציר ה־x ואילו נגזרת חלקית לפי y היא נגזרת כיוונית בכיוון ציר ה־y.

כדי לראות את זה, וקטור הכיוון בכיוון ציר ה־x הוא $(1,0)$ ולכן נגזרת כיווית בכיוון ציר ה־x היא :

$lim_{t\to0}\frac{f((a,b)+t(1,0))-f(a,b)}{t}=lim_{t\to0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}$ וזו בדיוק נגזרת חלקית לפי x בנקודה (a,b), באותו אופן אפשר לראות שנגזרת חלקית לפי y היא נגזרת כיוונית בכיוון ציר ה־y

כלל השרשרת

תזכורת:

יהי $D\subset\mathbb{R}^n$ תחום, ויהי $G\subseteq\mathbb{R}^m$תחום. תהיינה $x_1(\bar{u}),x_2(\bar{u}),....,x_n(\bar{u})$ פוקציות מ־$\mathbb{R}^m$ ל־$\mathbb{R}$, המוגדרות בתחום D, גזירות חלקית לפי $u_1,u_2,...,u_m$ נקודה $\bar{u_0}$ שבתחום זה, ומקיימות לכל $\bar{u}$ ב־G:

$(x_1(\bar{u}),x_2(\bar{u}),...,x_n(\bar{u}))\in D$ תהי $f(x_1,x_2,...,x_n)$ פונקציה מ־$\mathbb{R}^n$ ל־$\mathbb{R}$, המוגדרת בתחום D ודיפרנציאבילית בנקודה $\bar{x_0}$, אזי הפונקציה המוכרבת :

$F(\bar{u})=f(x_1(\bar{u}),...,x_n(\bar{u}))$ גזירה חלקית בנקודה $\bar{u_0}$ ולכן $1\le i\le m$ מתקיים :

$\frac{\partial F}{\partial u_i}(\bar{u_0})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x_0})\frac{\partial x_j}{\partial u_i}(\bar{u_0})$.

מקרה פרטי של המשפט שאינו בכיתה הוא עבור הרכבה של פונקציות בשני משתנים:

תהיינה $u(x,y)$ ו־$v(x,y)$ מוגדרות בסביבת הנקודה (x_0,y_0) והפונקציה $f(u,v)$ מוגדרת בסביבת הנקודה $(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)) = (u_0,v_0)$. אם הפונקציה $f(u,v)$ דיפרנציאבילית ב־(u_0,v_0) ובנקודה (x_0,y_0) קיימות הנגזרות

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ אזי באותה נקודה (x_0,y_0) קיימות נגזרות של הפונקציה מורכבת $f(u(x,y),v(x,y))$ המקיימות:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

הערה חשובה:

פונקציה f צריכה להיות דיפרנציאבילית בנקודה (u_0,v_0) כדי האפשר יהיה להשתמש בכלל השרשרת, אחרת כלל השרשרת אינו מתקיים:

לדוגמה: $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)=(0,0) \\ 0 & ohterwise \end{cases}$$

קל לראות ש־f אינה דיפרנציאבילית בקודה $(0,0)$ ובנוסף הנגזרות החלקיות שלה מתאפסות ב־$(0,0)$ ולכן עבור כל שתי פונקציות: $x(t),y(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים:

$\frac{df}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot\frac{dy}{dt} = 0$ כלמר לפי כלל השרשרת הנגזרת של f מתאפסת עבור כל $x(y),y(t)$ אשר גזירות ב־$(0,0)$, מצד שני נבחר את הפונקציות הבאות: $x(t)=2t$, $y(t)=t$ ואזי

$f(2t,t) = \frac{4t^3}{5t^2} = \frac{4}{5}t$ ולכן הנגזרת של f בנקודה באפס היא $\frac{4}{5}\neq 0$ וזה עומד בסתירה למה שהראינו מקודם, לכן כלל השרשרת אינו מתקיים כאן.